

ФІЛОСОФІЯ XVIII СТОЛІТТЯ

Віктор Козловський

МАТЕМАТИКА У СВІТЛІ ТРАНСЦЕНДЕНТАЛЬНОЇ ЕСТЕТИКИ: ЧИ СТВОРИВ КАНТ «ФІЛОСОФІЮ МАТЕМАТИКИ»?

Вступ

Кантове вчення про простір і час, роль людської чуттєвості в пізнанні, а також дослідження німецьким філософом сутності математичного пізнання перебувають у центрі сучасних філософських пошуків, і то пошуків різного спрямування¹. Не меншої ваги ці ідеї мають і для сучасних досліджень у царині математики, логіки й епістемології. З особливою увагою Кантове вчення про математику, її зв'язок із суб'єктивними формами споглядання, як і критика такого підходу, вивчається численними дослідниками Кантового філософського спадку. Представники сучасної філософії математики, інформаційних наук і дослідники в царині нейронауки також цікавляться ідеями німецького філософа².

© В. Козловський, 2025

¹ У своєму студіюванні Кантового вчення про математику ми послуговувалися дослідженнями як сучасних фахівців, так і деякими давніми студіями відомих філософів. Тож ми спиралися на праці Ферхада Алаві [Alavi 2020], Еверта Бета [Beth 1957], Дарія Коріако [Koriako 1999], Ніколая Гартмана [Hartmann 1950], Альфредо Фераріна [Ferrarin 1995], Майкла Фрідмана [Friedman 2009; 2012; 2020], Роберта Гани [Hanna 2002], Джеремі Гайса [Heis 2014], Фроде Кьосавіка [Kjosavik 2009], Кенета Мандерса [Manders 2008], Чарльза Парсонса [Parsons 1992], Лізи Шабель [Shabel 2004], Деніела Сазерленда [Sutherland 2006; 2020; 2021], Ганса Файнгінгера [Vaihinger 1881-1892], Луї Кутюра [Couturat 1965], Пауля Наторпа [Natorp 1910], Альфреда Менцеля [Menzel 1911], Маркуса Вілашека [Willaschek 1997], Кристіни Енгельгард і Пітера Мітельштадта [Engelhard, Mittelstaedt 2008] та ін. фахівців. І це лише частина тих творів, які ми опрацювали задля розуміння масштабності цієї теми та концептуальних шляхів її студіювання.

² Цікаво, що студіювання Кантової філософії задля поглибленої розробки так званого «штучного інтелекту» (Artificial Intelligence) є одним із напрямків наукових досліджень цієї складної проблеми. Активно використовується Кантове вчення про синтетичну діяльність розуму. Це додає нових можливостей для створення програм і алгоритмів, здатних забезпечити функціонування штучного інтелекту [див.: Schönecker, Kim 2022]. Не менш цікавим є Кантове вчення про чуттєве споглядання й уяву для сучасних досліджень у царині нейрофізіології та нейропсихології, а також для нового напрямку філософських досліджень – нейрофеноменології [див.: Fazelpour, Thompson 2015].

Наше дослідження має декілька цілей: 1) довести недоречність інтерпретації Кантової трансцендентальної естетики як своєрідної «філософії математики»³; 2) задля цього окреслити особливості математичного пізнання з урахуванням «чистого» (ап'іорного) чуттєвого споглядання; 3) з'ясувати роль уяви (*Vorstellung*) та продуктивної сили виображення (*produktive Einbildungskraft*) у конструюванні математичних предметів⁴.

1. Кантове розрізнення наукового і метафізичного пізнання та значення цього розрізнення для математики

Загальновідомо, що Кантова трансцендентальна естетика, перша частина трактату «*Kritik der reinen Vernunft*» (далі – *KrV*), виконувала декілька взаємопов'язаних функцій: 1) обґрунтування умов можливості чуттєвого споглядання на підставі суб'єктивних (ап'іорних, «чистих») форм простору і часу; 2) здійснення демаркації між явищами і речами самими по собі, тобто між феноменальним досвідом і ноуменальним світом, доступу до якого, за Кантом, ми – люди – не маємо і тому не спроможні цей світ пізнавати; 3) з'ясування ролі суб'єктивних форм простору і часу в конституюванні математичних предметів.

Вчення про суб'єктивність форм чуттєвого споглядання – простору і часу, що становить трансцендентальну естетику, забезпечує відповідь на одне з трьох базових питань *KrV*, а саме: як можлива чиста математика? (*Wie ist reine Mathematik möglich?*) [Kant AA III: 40/B20]⁵. Кант переконаний, що лише суб'єктивність просто-

³ Згадаймо хоча б декого з тих, хто за останні 50-60 років доклав значних зусиль для дослідження Кантової «філософії математики». Це Ганс Райхенбах [Reichenbach 1951], Лоуренс Фос [Foss 1967], Яакко Гінтікка [Hintikka 1967; 1969; 1984], Ентоні Вінтерборн [Winterbourne 1981], Філіп Кітчер [Kitcher 1992], Карло Позі [Posy 1984; 2020], Даріус Копіако [Koriako 1999], Гордон Брітен [Brittan 1992; 2020] та ін. відомі фахівці.

⁴ Варто коротко окреслити концептуальний зміст уяви та продуктивної сили виображення. По-перше, ми використовуємо слово «уява» для перекладу Кантового поняття «*Vorstellung*», розуміючи, що в німецькій мові це слово має ширші семантичні конотації, обговорювати які не на часі. Для Канта «*Vorstellung*» це певна «сила душі», спроможна відтворювати якийсь минулий досвід, що певним чином зберігся в пам'яті суб'єкта. Отже, уява діє репродуктивно, на чому Кант неодноразово наголошував у своїх текстах. По-друге, уява і продуктивна сила виображення виконують об'єднавчу функцію, бо кожна з них, вельми своєрідно, на власний кшталт, поєднує чуттєвість і розум, тобто виконує роль «ланки ланцюга», який зв'язує ці суб'єктивні сили. По-третє, між ними є певні відмінності. Уява тісно пов'язана із суб'єктивною здатністю відтворювати попередній досвід у вигляді відповідних образів, без присутності оригіналу, тобто за умов відсутності у фокусі свідомості того предмета, який суб'єкт намагається відтворити, спираючись на минулий досвід і пам'ять. Кант вважав, що уява підпорядковується психологічним «законам асоціації». Інакше функціонує продуктивна сила виображення, адже це не стільки психологічна, скільки трансцендентальна сила, яка діє спонтанно, продукуючи образи і схеми, що не мають еквівалентів у попередньому досвіді, або ці образи потребують від людини вміння «додавати» до відомих бачень і схем такі риси, які змінюють, модифікують ці ментальні утворення. Саме уява і трансцендентальна сила виображення виконують украй важливу роль у конструюванні математичних предметів.

⁵ У цій статті ми посилатимемось на академічне видання (*Akademie-Ausgabe* – AA) Кантових текстів [Kant 1900 sqq.], зазначаючи у квадратних дужках: видання – AA; римськими цифрами – номер тому, арабськими – сторінки. Посилання на перше (A) й друге (B) видання *KrV* здійснюються як на основі відповідних томів *Akademie-Ausgabe*, так і з урахуванням загальноприйнятої пагінації першого і другого видань. При цитуванні нотаток (рефлексій) після сторінки вказуватимемо ще й відповідний номер нотатки.

ру і часу уможлиблює загальність і необхідність математичного пізнання. Натомість апеляція до якогось об'єктивного (фізичного) простору і часу (абсолютного чи відносного) суттєво ускладнює таке пізнання. Така апеляція потребує перманентного співвідношення математичного пізнання, його предметів і структур із топологією зовнішнього світу. Однак зазначена топологія сама залежить від математичного та природничо-наукового пізнання, які, у свою чергу, базуються на суб'єктивному просторі і часі. І якщо хтось вважає, що емпіричний світ, якась його «об'єктивна топологія» є надійним критерієм математичних істин, то вочевидь це хибний погляд на природу математики, а тому, згідно з Кантом, його треба відкинути. Тож «перевірка» математичного пізнання, яке ґрунтується на суб'єктивному просторі і часі, на його відповідність емпіричному світу, який має власну («об'єктивну») топологію, не розглядається німецьким філософом як щось, варте уваги. Бо як можна перевірити те, що визнається як суб'єктивно дане, апріорне – простір і час, а саме в цьому статусі топологія і визначається як об'єктивна реальність, тобто як загальнозначущі структури свідомості, що «накладаються» на феноменальний світ. Саме в цьому полягає «об'єктивність» апріорного простору і часу, а не в тому, що є якась інша «об'єктивність», яка перебуває за межами апріорних форм простору і часу. Кант переконаний у тому, що лише за наявності суб'єктивного простору і часу як єдино можливої топології математика може претендувати на статус аподиктичної науки.

Окрім цього Кант порушує ще два питання, у край важливі для трансцендентальної філософії⁶. Одне з них стосується природничих наук, провідних у тогочасному науковому поступі. Воно сформульоване таким чином: як можливе чисте природознавство (*Wie ist reine Naturwissenschaft möglich?*) [Kant AA III: 40/B20]. Друге питання стосується математики, її можливості як аподиктичної науки. Канта цікавить: як можлива чиста математика? (*Wie ist reine Mathematik möglich?*) [Kant AA III: 40/B20]. Тобто – як можлива чиста математика (арифметика, геометрія і алгебра) як наука, що продукує синтетичні знання, а не просто займається визначеннями, уточненнями математичних понять чи виконує роль прикладної науки.

Тож перше і друге питання окреслюють сферу наукового (теоретичного) пізнання. Водночас вони потребували, згідно з Кантом, належного трансцендентального обґрунтування⁷.

Третє питання також у край важливе, оскільки зачіпає базову філософську дисципліну – метафізику. Тож це питання про можливість метафізики як науки (*Wie ist*

⁶ Як стане зрозуміло з подальшого аналізу, ці три питання, а не одне лише питання про «чисту» математику, мають суттєве значення для розкриття обраної нами теми, а саме – з'ясування особливостей формування математичних предметів, а також Кантової «філософії математики», якщо про таке концептуальне утворення є сенс вести мову.

⁷ У статті «Кантове вчення про чуттєвість, простір і час: трансцендентальні, антропологічні та природничо-наукові конотації» ми коротко окреслили Кантів підхід до трансцендентального обґрунтування природознавства, який німецький філософ уміло продемонстрував у праці «Метафізичні засади природознавства» (1786). Ми акцентували увагу на значенні трансцендентальної естетики в цьому обґрунтуванні [Козловський 2024а: 19-22]. Це, до речі, підтвердило Кантову настанову стосовно того, що трансцендентальна естетика – не просто вчення про суб'єктивні форми чуттєвого споглядання: простір і час, а й певна методологія для філософських і наукових досліджень. Саме це уможлиблює застосування трансцендентальної естетики до аналізу засад і базових передумов наукового пізнання, зокрема – математичного. Отже трансцендентальна естетика виконує функцію методології наукового пізнання, що суттєво посилює значення саме цієї частини *KrV* для сучасних дослідників.

Metaphysik als Wissenschaft möglich?) [Kant AA III: 40/B22]. Саме воно безпосередньо пов'язане з «чистим» розумом, критику якого Кант виклав у трактаті *KrV*. Навіть якщо не погоджуватись із тими дослідниками, хто вважає критику метафізики як дисципліни, що послуговується «чистим» (спекулятивним) розумом, центральною частиною *KrV*, усе ж треба визнати: проблемний статус метафізики відіграє вельми вагомую роль у структурі цього трактату.

Проте між цими питаннями є принципова відмінність, на яку зазвичай не звертають особливої уваги, хоча на неї варто зважати, ведучи мову про математику. Справа в тому, що перше і друге питання не підважують науковий статус математики та природознавства, а лише формулюють мету – з'ясувати ті трансцендентальні передумови («споглядальні» та «категоріальні»), які уможливлюють синтетичні судження а рїогї в цих науках, а відтак встановити умови, за яких відбувається «зростання» математичного і природничо-наукового знання. Кант як дослідник природи – а цим дослідженням, як відомо, він займався тривалий час – усвідомлював «синтетичну» природу науки, її націленість на нові знання, її тісний зв'язок із досвідом і математикою. Кант також зберігає автономність, незалежність «чистої математики» (арифметики, геометрії та алгебри) від прикладного застосування, наприклад, у різних технічних науках, а також у природознавстві⁸.

Третє питання принципово інше, оскільки зачіпає науковий статус метафізики. Кант ставить за мету з'ясувати спроможність метафізики продукувати наукові знання. Критерії «науковості» в ті часи визначались природознавством і математикою (як, до речі, і тепер, із деякими уточненнями). Отже, питання вочевидь стосується співмірності способів аргументації та доведення, якими послуговуються творці метафізичних систем, і тих методів, які застосовуються в природознавстві та математиці⁹.

⁸ Кант у певному сенсі коливався стосовно механіки, яка завдяки зусиллям плеяди видатних учених XVII–XVIII століть (передовсім Ісаака Ньютона) була найкраще опрацьованою тогочасною наукою. Ньютонова загальна механіка упродовж тривалого часу відігравала роль основи для дослідження природи. Тому не дивно, що ця наука завжди перебувала в центрі уваги Канта. Механіка розглядалась як наука, предмет якої конструється в «чистому» спогляданні часу. Таке розуміння викладено в професорській дисертації «De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis» (1770), що завдяки визнанню суб'єктивності простору і часу постала як рішучий крок Канта в бік трансцендентального ідеалізму. Та вже в *KrV* статус загальної механіки переглядається, оскільки ця наука має стосунок як до часу, так і до простору. Це впливає з того, що закони механіки мусять враховувати певний емпіричний компонент, який, власне, і є тим, що рухається в просторі. Саме цим рухом своєрідно поєднані простір і час.

⁹ У праці «Пролегомени до кожної майбутньої метафізики, яка зможе постати як наука» (1783) Кант формулює ще одне питання: як узагалі можлива метафізика? [Kant AA IV: 280]. Тобто він порушує питання про можливість метафізики до її розгляду як науки. І вже після цього німецький філософ переходить до з'ясування наукових спроможностей метафізики. І це є четверте питання, а не третє, як у *KrV*. Кант зазначає, що ідеї, якими оперує метафізика, закорінені в природі розуму (in der Natur der Vernunft) до будь-яких метафізичних доктрин [Kant AA IV: 328]. Але Канта цікавить обґрунтування цих ідей в метафізичних системах, бо саме це є одним із центральних питань для Кантового трансцендентального ідеалізму, а тому саме це доконечно прояснює відмінність наукового дискурсу від інших типів розмислу про суще, тим паче якщо це надчуттєвий світ – предмет зазіхань метафізичного пізнання. Наукові розмисли стосуються феноменального світу, а традиційна метафізика цікавиться трансцендентними речами, що, на думку Канта, потребує перегляду – як предметної сфери метафізики (Бог, безсмертя душі, світ як ціле, свобода), так і методів, якими послуговується метафізика. І, що не менш важливо, – способу мислення, притаманного метафізичним міркуванням. Адже в останніх, як з'ясував Кант, домінують спекулятивні розмисли, що спираються на категоричний силлогізм.

Таким чином, Кант здійснює чітку демаркацію між математичним, природничим і метафізичним пізнанням. І ця демаркація ґрунтується на трьох суб'єктивних спроможностях – спогляданні, розсуді і розумі. Когнітивні можливості цих спроможностей досліджуються в трьох частинах *KrV* – трансцендентальній естетиці, трансцендентальній логіці і трансцендентальній діалектиці, де встановлюються апіорні засади математики, природознавства і метафізики. Відповідь на питання, чи належить метафізика до науки, потребувала від Канта значних інтелектуальних зусиль. Адже цю відповідь неможливо редукувати до тих трансцендентальних засад, на яких розгортається пізнання в царині математики та природознавства. Тому не дивно, що третя частина *KrV* присвячена метафізиці, де Кант демонструє ті «нерозв'язні» проблеми, суперечності (паралогізми й антиномії), що «нівелюють» претензії метафізики на наукове пізнання¹⁰. Ця неможливість визнати науковий статус метафізичного пізнання випливає з того, що метафізика відволікається від умов можливого досвіду, з необхідністю пов'язаних із суб'єктивними формами чуттєвого споглядання – простором і часом. І це цілком зрозуміло: метафізику цікавлять трансцендентні, надчуттєві речі. Математика ж і природознавство в різний спосіб дотичні до чуттєвого споглядання. Отже, метафізика не може послуговуватися методами математики (саме це полюблив робити Вольф і його численні учні), як, у свою чергу, математика не повинна претендувати на статус метафізики, тобто намагатися зазирнути в надчуттє-

Кант мав на увазі панівне значення силогізму в метафізиці, бо лише за умов звернення до категоричних умовиводів, а не якихось інших (наприклад, індуктивних, традуктивних), метафізика може претендувати (без достатніх на те підстав, згідно з Кантом) на пізнання трансцендентних речей. Проте це не відповідає критеріям наукового дослідження – ні природознавчого, ні математичного. У свою чергу, природознавство і математика не повинні спокушатися метафізичними «мріями» зазирнути за межі досвіду. Для Канта неприпустимо поширювати наукове знання на сферу надчуттєвого світу. Засновник критичної філософії вочевидь не підтримав би спроби пізніших німецьких мислителів створити філософію природи як різновид спекулятивної метафізики.

¹⁰ Кант розрізняв метафізику як потребу розуму і наукове пізнання надчуттєвих речей. Звісно, потреба розуму весь час штовхав філософів до такого метафізичного пізнання, намагаючись надати йому наукового статусу. Саме цю претензію метафізики, вважає Кант, необхідно ретельно дослідити на предмет відповідності науці та її критеріям. Кант здійснив демаркацію між наукою і метафізикою, якої завжди дотримувався. Тож усі апологети так званої Кантової метафізики повинні з цим рахуватись, усвідомлюючи: те, що Кант розглядав як метафізику (а цим терміном він широко послуговувався й у період критичного філософування), це трансцендентальна філософія в таких її двох різновидах, як метафізика природи і метафізика свободи. Ці метафізичні проекти мають цілковито трансцендентальні обладунки, а не щось на кшталт вольф'янської метафізичної системи, яка своїми «щупальцями» охопила все суще – і на рівні наукового, і на рівні метафізичного пізнання. Відомо, що Вольф позиціонував метафізичне пізнання як наукове, бо воно спиралося на раціоналізм, що послуговувався математичним методом (метод Евкліда). Для Вольфа та його прибічників саме математичний метод є надійною запорукою науковості. Щодо цього Кант послідовно відстоював іншу думку – наука (природознавство), математика і філософія (частиною якої є метафізика) повинні мати власні методи пізнання. Це не означає, що методи різних наук і філософії не можуть мати точок дотику, та базовою умовою успішного функціонування і розвитку науки і філософії є наявність власних методів дослідження. Кожна наука, і це Кант добре розумів, що претендує на предметну специфіку, має послуговуватися власними методами дослідження. Саме методи суттєво впливають на конституювання предметної специфіки будь-якої науки. Відсутність таких методів унеможлиблює предметну специфікацію тієї чи іншої науки. Тому редукція філософських методів пізнання до математичних методів доведення засвідчує, переконаний Кант, не силу, а слабкість філософії, бо позбавляє останню власної методології.

вий світ речей самих по собі. Принаймні цього неможливо досягти засобами теоретичного (мовою Канта – спекулятивного) розуму. Тож Кант відмовляє метафізиці, як і математиці, у здатності пізнавати цей надчуттєвий світ. У цьому аспекті його позиція принципово антиплатонівська.

2. Трансцендентальні засади математичного пізнання

Розрізнення наукового (математичного та природничого) і метафізичного пізнання, як і з'ясування наукового статусу метафізики, мають вирішальне значення для нашого аналізу математичного пізнання. Власне, без цієї демаркації будь-які намагання зрозуміти сутність Кантового вчення про математику та її предметні сфери будуть концептуально обмеженими. Кант ніколи не дозволяв собі нехтувати цією демаркацією, «змішувати» різні види пізнання чи редукувати їх до якогось одного виду пізнання – до природознавства, математики або метафізики¹¹. Кант усвідомлював особливості конституювання математичних предметів, розрізняючи за способом конституювання геометрію, арифметику й алгебру. Він розумів, що між цими математичними дисциплінами існують відмінності, оскільки геометрія уможливорюється конституюванням її предметів у суб'єктивній формі простору, тоді як арифметика й алгебра – у формі часу.

Проте існує ще одна передумова математичного пізнання, вельми важлива і принципова: пізнання уможливорюється демаркацією між явищами і речами самими по собі. Назагал це випливає з трансцендентальної естетики, у межах якої ідеться про феноменальний, а не ноуменальний досвід. Тож будь-яке пізнання, і математика не є тут винятком, має враховувати розрізнення феноменального й ноуменального світів. Ми не маємо не плекати надію на можливість ноуменального пізнання. Математика, природознавство – це пізнання в царині явищ, а не речей самих по собі, попри те, що ці науки послуговуються різними методами пізнання, а тому демонструють різні модальності пізнання «світу явищ» – математика націлена на кількісні параметри, тоді як природознавство – на якісні та кількісні аспекти явищ. Для математики базовою передумовою є трансцендентальна естетика, тоді як для природознавства – трансцендентальна логіка, і особливо трансцендентальна дедукція категорій, в якій, зрештою, обґрунтовується єдність досвіду, його загальнозначущість, тобто об'єктивність.

Кант тісно пов'язує математику (арифметику, геометрію й алгебру) із суб'єктивними («чистими», апіорними) формами чуттєвого споглядання – простором і часом. Дослідження трансцендентальних умов можливості математики розгортається в трансцендентальній естетиці, що підкреслює виняткове значення «споглядального» компонента в конституюванні математичних предметів. У «Пролегоменах до кожної майбутньої метафізики, яка зможе постати як наука» Кант недвозначно підкреслював цю споглядальну функцію математики: «Ми бачимо, однак, що всі математичні пізнання мають ту особливість, що вони повинні спочатку представити своє поняття в спогляданні, і то а пріорі, тобто в спогляданні, яке є не емпіричним, а чистим спо-

¹¹ Варто пам'ятати про особливість Кантового філософування – дотримання визначених концептуальних рамок дослідження, відмова перетинати їх у довільний, необґрунтований спосіб і, певна річ, – відмова ігнорувати окреслені рамки понять, «діалектично» поєднувати останні. Кант вважав мислення, що не шанує цих вимог, непослідовним, суперечливим. Йому не подобалося, коли хтось вдавався до такої методики філософського розмислу.

гляданням, без якого вони не можуть зробити жодного кроку; тому їхні судження завжди інтуїтивні» [Kant AA IV: 281]. Тоді постає ще одне питання: як узагалі можливе споглядання математичних предметів у «чистих» формах простору і часу? Це питання вкрай важливе, оскільки людські форми споглядання мають чуттєві конотації, тобто це чуттєве споглядання, а не якесь інше – інтелектуальне, ноуменальне, містичне тощо.

Кант формулює певну парадоксальність залучення споглядання до математичного формотворення, так би мовити – споглядання без матеріального, чуттєвого компонента. Точніше кажучи, ідеться про його мінімізацію, адже цілковитого усунення чуттєвості бути не може, бо споглядання завжди має чуттєву складову, навіть тоді, коли маємо справу з «чистим» спогляданням. Кант підкреслює парадоксальність такого споглядання, в якому (у всій повноті «чуттєвої присутності») відсутній предмет споглядання. Бо йдеться не про емпіричне споглядання явища, а про конструювання предмета споглядання: «тепер питання таке: як можливо споглядати щось а priori? Споглядання є таким уявленням, яке безпосередньо залежить від наявності предмета. Отже, видається неможливим споглядання початково а priori, адже тоді споглядання мало б відбуватися без присутності предмета, як попереднього, так і теперішнього, до якого воно мало б стосунок, а отже – не могло би бути спогляданням... Але яким чином споглядання предмета може передувати самому предмету?» [Kant AA IV: 281-282].

Відповідь Канта цікава й вельми парадоксальна: таке споглядання можливе за наявності двох передумов: 1) збереження в цьому «чистому» («математичному») спогляданні чуттєвого компонента; 2) визнання того, що таке споглядання уможливується конструктивною активністю суб'єкта, а саме його спроможністю створювати математичні предмети (фігури, числа, алгебраїчні, символічні рівняння тощо) у формах суб'єктивного простору і часу. За межами такої конструктивної діяльності, спрямованої на математичні предмети, «чисте» споглядання неможливе. Щодо такої залежності «чистого» споглядання від конструювання Кант пише: «Це спостереження за природою математики вже дає нам вказівку на першу та найвищу умову її можливості: а саме, вона повинна ґрунтуватися на деякому чистому спогляданні, в якому вона може зображувати всі свої поняття *in concreto* і водночас а priori, або, як кажуть, конструювати їх» [Kant AA IV: 281].

Як бачимо, Кант пов'язує апіорне («чисте») споглядання з конструюванням математичних предметів, а не просто з чуттєвим спогляданням емпіричних явищ¹². Хоча чуттєвий компонент уже присутній у такому спогляданні тією мірою, якою це необхідно для конструювання тих математичних предметів. Останні хоч і постають у спогляданні як одиничні конструкти (певна геометрична фігура, конкретне число, певний алгебраїчний символічний ряд чисел і знаків тощо), усе ж унаочнюють загальні риси тих математичних предметів, які вони (конструкти, термін, яким часто послуговувався Кант) репрезентують, демонструють. І таке конструювання як демонстрація (через конкретне до загального) уможливує синтетичне (математичне)

¹² Ба більше, Кант стверджує: «Якщо ми зможемо відкрити це чисте споглядання і можливість такого, то легко пояснимо, як у чистій математиці можливі синтетичні судження а priori, а отже, і як можлива сама ця наука» [Kant AA IV: 281]. «Чисте» (апіорне) споглядання уможливує аподиктичний рівень математичного пізнання на противагу емпіричному пізнанню, яке є апостеріорним, хоч і воно уможливується трансцендентальними засадами часу і простору, з тією особливістю, що воно потребує емпіричного компоненту.

пізнання а priori. І саме в цьому полягає функція «чистого» споглядання в математичному пізнанні.

До математичного пізнання Кант повертається знову в розділі «Die Disciplin der reinen Vernunft im dogmatischen Gebrauche» *KrV*, де досить детально аналізуються особливості конструктивістської діяльності в царині математики, її різних дисциплін, включно з алгеброю: «Математика однак конструює не тільки величини (quanta), як у геометрії, але величину як таку (quantitatem), як в алгебрі, причому вона повністю абстрагується від природи предмета, який мислиться відповідно до такого поняття величини. Потім вона обирає певне позначення для всіх побудов величин взагалі (чисел), як додавання, віднімання тощо, добування кореня; і після того, як вона також позначила загальне поняття величини відповідно до різних операцій із ним, вона унаочнює всі дії, які виробляються і змінюються величиною за певними загальними правилами» [Kant, AA III: 471/A717/B745]¹³.

Як бачимо, Кант ретельно аналізує процес конструювання математичних предметів – величини (quantitatem), що формується на основі чисел; фігур, що конструюються на основі дискретних величин (quanta), їхнього поєднання за певними правилами – арифметичними і алгебраїчними. І саме таке конструювання уможливило дієвість «чистого» споглядання, завдяки якому ми in concreto зображуємо (у суб'єктивному просторі і часі) певні математичні поняття, попередньо визначені дискурсивно. Та це не може забезпечити належним чином синтетичні функції математичного пізнання. Адже щоби відбувся перехід від аналітичного (а це функція дискурсивного визначення математичних понять) до синтетичного пізнання (а це функція споглядання), зазначені синтетичні функції необхідно ще «занурити» в «чисте» споглядання.

Цікаві спостереження щодо специфіки математичного розмислу, його відмінності від філософського подибуємо в Кантовому курсі лекцій «Philosophische Enzyklopädie». У цих лекціях зазначається: «Талант, необхідний для філософії, відрізняється від таланту, необхідного для математики... Математик – великий архітектор. Він може бути дуже корисним для філософії через упорядкування, але він не збагатить її новими поняттями. Там, де потрібно конструювати поняття, математик може зробити все, що завгодно, але у випадку з поняттями, які є дискурсивними, він нічого не досягне» [Kant AA XXIX: 12-13]. Отож синтетична функція математичного пізнання, яка уможливлюється конструктивною побудовою понять у формах «чистого» суб'єктивного споглядання, визнається Кантом головною рисою математики¹⁴.

¹³ Цілком зрозуміло, чому конструктивістську особливість математичних дисциплін Кант ретельно аналізує саме в цьому розділі. Здавалось би, це вельми далеко від «законного місця» цих дисциплін у трансцендентальній естетиці. Але справа в тім, що в цьому розділі німецького філософа цікавить не сутність математики, не її залежність від суб'єктивного часу і простору, а те, яким чином відбувається конструювання математичних предметів, понять в арифметиці, геометрії й алгебрі. Тобто в цьому «догматичному» (теоретичному) застосуванні розуму важливо було показати як саме відбувається конструювання математичних предметів, які процедури (споглядальні й інтелектуальні) застосовуються в цьому процесі, і як вони діють у арифметиці, геометрії й алгебрі.

¹⁴ Ганс Райхенбах, відомий німецько-американський філософ, який розпочинав свою філософську діяльність як прибічник неопозитивізму Віденського гуртка, писав стосовно Кантового вчення про синтетичність математичного пізнання: «Якби Кант дожив до фізики і математики наших днів, він міг би цілковито відмовитися від філософії синтетичного апіорі. Тож давайте розглядати його книги як документи свого часу» [Reichenbach 1951: 44]. Адже Кант нібито не усвідом-

Таким чином, згідно з Кантом, необхідно розрізняти конструювання математичних понять і формування, створення цих понять. У першому випадку йдеться про продукування понять у формах споглядання, щодо другого випадку, то мається на увазі довільне утворення математичних предметів на підставі певних припущень та логічних засад. Це своєрідна комбінаторика, яка часто застосовується у математичному дослідженні, без будь-якого звернення до форм споглядання. Для Канта це принципове розрізнення відігравало вирішальну роль у його вченні про математику. І це, знову-таки, відповідь тим пізнішим критикам, зокрема Бертрану Раселу, які наполягали на логічній природі математики, тобто її формальних властивостях, які не потребують ніякого споглядання. Вочевидь такі властивості визначають аналітичний статус математичних істин, у той час як Канта цікавило, як можливе математичне синтетичне пізнання, які суб'єктивні сили уможливають таке пізнання¹⁵.

лював особливостей сучасної науки: принципи, які він «вважав незамінними для науки і не аналітичними за своєю природою, були визнані такими, що діють лише в обмеженій мірі» [ibid.]. Але апеляція Райхенбаха до нових досягнень фізики і математики не спростовує трансцендентальні умови пізнання, зокрема – потребу в «чистому» спогляданні. Як пише Лоуренс Фос, Райхенбах помилявся щодо залежності геометрії від фізики: не тому, що був «дезінформований стосовно структури простору, а тому, що не враховував рівень, на якому рухається аргумент Канта. А той рухається не на рівні емпіричних тверджень, а на рівні аналізу знання» [Foss 1967: 44]. І це досить точна констатація позиції Канта: математика – і геометрія тут не є винятком – стосується не речей, досвіду, а знання про певні конфігурації площини, точок, векторів, чисел, величин тощо. І те, що ми застосовуємо ці знання до емпіричного досвіду, свідчить не про залежність «чистої» математики від досвіду, а про її ефективність навіть за її власними межами.

¹⁵ Побутує думка, що так звані неевклідові геометрії спростовують Кантів погляд на геометрію. Але варто зазначити, що Кант не досліджував такі геометричні структури, хоча спроби їх створити й мали місце за його часів. Варто згадати, наприклад, розвідки Йогана Ламберта (зокрема, його трактат «Theorie der Parallellinien»), які стосувалися «нової геометрії». Мабуть, Кант був знайомий зі згаданою працею. Відомо, що він листувався з Ламбертом, знав його праці, проте вочевидь сприйняв цю нову, гіпотетичну геометрію як інтелектуальну конструкцію, що має обмежені епістемологічні можливості. Він зважав на можливості й межі, що їх трансцендентальна естетика накладає на будь-які інтелектуальні побудови, які претендують на епістемологічний статус, а не просто на логіко-математичне конструювання абстрактних структур, що їх людина не має можливості навіть уявити. Тому евклідова геометрія є базовою моделлю для пізнання. Саме вона відповідає трансцендентальним умовам досвіду та конструювання предметів геометрії для таких розумних істот, якими є ми, люди. Адже наша конституція (тілесна, організація нашої чуттєвості, свідомості тощо) має таку топологічну розмірність, яка адекватно описується евклідовою геометрією. Якись інші геометрії (з певною мірою кривизни або ж якась n -мірна топологія) не сприймаються нашими формами чуттєвого споглядання. З цього випливає, що такі топологічні структури цілком можливо використовувати в теоретичних моделях (математичних, космологічних тощо). Але оскільки такі моделі не мають рецептивної сили сприйняття, то вони не можуть виконувати функцію умов можливості організації людського досвіду. Тож щоби стати надбанням нашого досвіду, ці теоретичні моделі, що долають межі можливостей нашого споглядання, мають якимось чином (через низку опосередкованих понять, схем і конструктів) наблизитися до наших можливостей. Звісно, коли йдеться про емпіричний досвід, формований засобами сучасної науки, то це вельми складний шлях, який потребує низки спостережень з боку дослідників. І застосування для цих спостережень різноманітних технічних інструментів, ретельно організованих експериментів, використання відповідного обладнання, приладів. Усі ці зусилля мають вирішальне значення для верифікації (або фальсифікації) будь-яких теоретичних моделей, що мають належну логіко-математичну розробку, але поки що не мають відповідного емпіричного обґрунтування. Іноді для такого емпіричного обґрунтування цілком достатньо підтвердження не всієї моделі, а хоча б тих теоретичних висновків, що з цієї моделі «випливають».

а) Кант про конструювання предметів геометрії, арифметики та алгебри: функція «чистого» споглядання

Отже, жодна математична дисципліна – геометрія, арифметика й алгебра – не можлива, згідно з Кантом, без «споглядального» аспекту. Геометрія демонструє свою залежність від «чистої» форми споглядання в просторі. Згідно з Кантом, усі геометричні предмети (куби, квадрати, ромби, трикутники, чотирикутники, багатокутники, прямі лінії, сфери, площини тощо) потребують конструювання в суб'єктивній формі простору, хоча геометричні фігури не мають безпосереднього стосунку до досвіду, а отже – до зовнішнього простору, або «фізичного» (звісно, у Кантовому розумінні), як певна наукова конструкція, що упорядковує зовнішні явища, з урахуванням умов можливості суб'єктивного сприйняття цих явищ, а не якогось так званого об'єктивного розташування речей і явищ світу.

Арифметика демонструє свою залежність від «чистого» споглядання в часі, тобто це темпоральна дисципліна – на противагу геометрії як науці, що уможливорюється суб'єктивною формою простору. Арифметика оперує числами, їхніми властивостями і співвідношеннями. Арифметичні операції розгортаються як послідовність згідно з певними діями – додаванням, відніманням, діленням, множенням та ін. За Кантом, усі ці арифметичні дії залежать від суб'єктивної («чистої») форми часу, якщо ми намагаємося за допомогою цих дій досягти конкретних розв'язків певних арифметичних задач, а не просто визначити концептуальні рамки арифметики, правил арифметичних дій.

Дещо складнішим є питання щодо алгебри, про яку в Канта сказано небагато, однак ця математична дисципліна відіграє певну концептуальну роль у трансцендентальній естетиці. Складність у тому, що алгебра використовує не число (як арифметика) і не фігури, просторові конфігурації (як геометрія, хоча різні її розділи роблять це своєрідно, наприклад, стереометрія, планіметрія, аналітична геометрія та ін.), а знаки (буквені символи та числові співвідношення), так само зберігаючи при цьому своє конституювання в суб'єктивній формі часу, як геометричні предмети – у просторі¹⁶. Кант наполягає, що йдеться про не пов'язаний із якимись матеріальними носіями «чистий» суб'єктивний простір, що задає «чисту» форму як умову можливості конструювання геометричних фігур. Алгебра унаочнює рух у часі числових

¹⁶ Щоправда, аналітична геометрія, здається, не підпадає під конструктивну діяльність у суб'єктивному просторі, оскільки цей різновид геометрії будує свої предмети «алгебраїчно», тобто більшою мірою спираючись на час, описуючи кількісні співвідношення системи координат. У певному плані це підтверджує думку деяких дослідників щодо важливості схематизації математичних понять, і це стосується пояснення особливостей конструювання понять як в аналітичній геометрії, так і в математиці в цілому. Про таку схематизацію, її роль у математиці добре пише Ентоні Вінтерборн, пояснюючи схематизацією конструктивістську природу математики [Winterbourne 1981]. Слід зазначити, що розділ про категоріальний схематизм («Von dem Schematismus der reinen Verstandesbegriffe») є важливою частиною Аналітики засад («Die Analytik der Grundsätze») *KrV* [Kant AA III:134–139/A137–147 /B176–187]. Схематизм уможливорює застосування категорій до явищ, а це означає, що категорії завжди імпліцитно передбачають і потребують певного чуттєвого споглядання, своєрідного поєднання чистих розсудкових понять (категорій) із чуттєвим спогляданням. І це має безпосередній стосунок до математичних понять. Наприклад, номінальне визначення поняття числа надає йому аналітичної, а не синтетичної значущості, оскільки в процесі математичного пізнання число потребує «чистого» споглядання (у формі часу), що, власне, уможливорює синтетичне пізнання a priori. Отже, математичні поняття потребують такого схематизму для свого конструювання, що й уможливорює синтетичне математичне пізнання.

рядів і співвідношень на основі певних правил і формул, спираючись на особливу символічну мову. І в цьому сенсі алгебра впорядковує рух чисел, числових співвідношень як певну прогресію.

Кант у кількох текстах підкреслює особливості алгебри в порівнянні з арифметикою. Так, у *KrV* він пише про алгебру як про «буквене обчислення», що відбувається засобами символічної мови в «чистому» спогляданні, як «особливе конструювання» (*charakteristische Construction*) [Kant AA III: 481/A734/B762]. Та цього недостатньо для розуміння конституювання числових рядів і співвідношень, характерних для алгебри, і в певному сенсі – для арифметики. Кант зазначає ще й таке: «Предмети арифметики й алгебри не перебувають, наскільки це можливо, в умовах часу, але, тим не менш, вони є конструкцією поняття величини в уяві [*Vorstellung*] про неї через синтез сили виображення [*Einbildungskraft*], а саме тієї композиції [*Zusammensetzung*], без якої жоден предмет математики не може бути даний» [Kant, AA XIV: 54/13]. У цьому фрагменті, а це нотатки до лекцій з математики, фігурують три важливих поняття, які уможлиблюють алгебру й арифметику: 1) власне суб'єктивний час; 2) побудова величин в уяві; 3) синтез всього процесу у виображенні. У цьому фрагменті німецький філософ акцентує увагу не на часі, а на процесі конституювання (Кант використовує поняття композиції) величин і співвідношень. А це потребує споглядання у формі уяви (яке уможлиблює оперування числами як елементами числового ряду) та сили виображення (а ця «сила душі» дозволяє оперувати цими елементами під кутом зору антиципації).

Сучасний дослідник Майкл Янг вважає, що звернення Канта до уяви та продуктивного виображення свідчить про поглиблення вчення про особливості формування як математичних предметів, так і емпіричних понять. Власне йдеться про певну схематизацію процесу конструювання математичних предметів (арифметичних і геометричних), без чого ці предмети неможливі. Янг, що, правда, розрізняє уяву, яка активно діє в конструюванні математичних предметів, і продуктивну силу виображення, що застосовується в процесі емпіричного пізнання [Young 1984]. Як свідчать Кантові нотатки з математики, така диференціація не підтримується німецьким філософом, оскільки ці «сили душі» діють і під час конструювання математичних предметів.

Таке конструювання стосується до споглядання, що, правда – не емпіричного, а «чистого», тобто такого, в якому відбувається формування, створення математичних предметів і структур із залученням уяви і сили виображення. У цьому полягає особливість «чистого» споглядання, його відмінності від простої «сенсивності» і водночас спорідненості з нею. Адже уява і продуктивна сила виображення мають чуттєвий компонент, хоч і не редукуються до нього. Кант цілком впевнено визначав особливість конструювання понять у математиці: «У загальному сенсі будь-яку репрезентацію поняття шляхом (самостійного) продукування відповідного йому уявлення можна назвати конструюванням. Якщо це здійснюється завдяки силі уяви відповідно до поняття а *priori*, то це називається чистим конструюванням (яке математик мусить прийняти як основу для всіх своїх демонстрацій; отже, властивості кола, намалювавши його паличкою на піску (хай би яким нерівним воно при цьому вийшло), він може довести так само досконало, як і найкращий художник, що намалював його на гравюрі. Але якщо це практикується на будь-якому матеріалі, це можна назвати емпіричним конструюванням. Перше можна також назвати схематичним, друге – технічним. Останнє насправді так називати неправильно (бо це належить не до науки, а до мистецтва і виконується інструментами); існує або геометричне за допомогою

циркуля і лінійки, або механічне конструювання, для якого необхідні інші інструменти» [Kant AA VIII: 191].

Таке «чисте» конструювання притаманне й арифметиці, з тією відмінністю від геометрії, що воно відбувається в часі. Як зазначають сучасні дослідники Крістіна Енгельгард і Пітер Мітельштадт, «інтерпретація теорії арифметики Канта як конструктивного підходу відкриває нові можливості для з'ясування кількох проблем. Оскільки теорія арифметики Канта ґрунтується на тій ідеї, що числа можуть бути побудовані шляхом послідовного синтезу символів або знаків у часі, стає очевидним, що арифметичні формули є синтетичними, а не аналітичними, і що ці формули випливають із правил можливої побудови знаків, а тому є апіорно істинними в кантівському розумінні. Таким чином, арифметичні формули можна вважати головними свідками синтетичних суджень *a priori*, показуючи водночас, що ці поняття не є порожніми» [Engelhard, Mittelstaedt 2008: 269].

Важко не погодитись із тією думкою німецьких дослідників, що саме завдяки трансцендентальним засадам (зокрема, часу) відбувається узгодження арифметичного підрахунку з певними правилами. Звісно, арифметичне правило може мати дискурсивне визначення, яке ми вивчаємо і запам'ятовуємо, перебуваючи в молодших класах, але дієвість цього правила визначається його застосуванням у темпоральній формі споглядання. Саме в спогляданні відбувається арифметичний підрахунок, а отже і синтетичне пізнання. Приклад Канта $7+5=12$ є вельми простою і цілком очевидною демонстрацією такого синтезу. І навіть наміри деякого з дослідників спростувати цю синтетичну роль часу в конструюванні, наприклад, того ж числа 12 не виглядають переконливими, якщо відштовхуватись не від пізніших, логіцистських теорій арифметики, а від тих завдань, які ставив Кант, досліджуючи особливості синтетичного знання в математиці, зокрема – арифметиці й алгебрі. Для Канта було зрозуміло, що редукція математичного пізнання до логіки, до правил побудови несуперечливих номінальних визначень математичних предметів не може вважатися достатньою підставою для розгортання епістемологічних можливостей математики.

Кант переконаний, що «чиста математика» (а це не лише арифметика, а й геометрія, алгебра, диференціальне числення тощо) потребує «чистого» конструювання, а не емпіричного, оскільки останнє є технічним і не відповідає вимогам «чистого», власне математичного конструювання. Звісно, математичні предмети необхідно якимось чином унаочнювати, звертаючись до матеріальних інструментів (олівців, ручок, крейди, фломастерів, цифрового запису) і матеріальних носіїв – папірусу, пергаменту, паперу, дошок, електронних носіїв, при цьому не редукуючи математичні поняття до цих матеріальних факторів та інструментів¹⁷. Кант неодноразово наго-

¹⁷ І знову в розділі «Die Disciplin der reinen Vernunft im dogmatischen Gebrauche» *KrV* Кант підкреслює особливість «чистого» споглядання – воно мусить бути не лише конструктивістським, а й неемпіричним. Про таке споглядання, яке виявляє свою спроможність у випадку побудови математичних предметів (понять), Кант пише: «Філософське пізнання – це пізнання розуму з понять, математичне – з конструювання понять. Але сконструювати поняття означає апіорі уявити відповідне йому споглядання. Таким чином, для конструювання поняття потрібне неемпіричне споглядання [nichtempirische Anschauung], яке, отже, як споглядання, є єдиничним предметом, але тим не менш як конструкція поняття (загального уявлення) повинне унаочнювати загал для всіх можливих споглядань, що належать до одного й того ж поняття в думці» [Kant AA III: 469/ A713/B741]. Емпіричний момент споглядання, вважає Кант, з'являється тоді, коли ми пишемо, малюємо, креслимо щось (геометричну фігуру, числа, символічні ряди чисел тощо) на папері, надаючи цим «ідеальним» предметам певного емпіричного вираження.

лошував на «чистому» спогляданні як базовому факторі конструювання математичних предметів, що унеможливило їх редукцію до матеріального аспекту, в якому зазвичай їх зображають, тобто до технічного зображення цих предметів¹⁸.

І ще одна важлива констатація, до якої привертає увагу німецький філософ: хоча між арифметичними і геометричними поняттями існує відмінність¹⁹, вони все ж взаємопов'язані. Для Канта цілком очевидно, що без геометрії ми не мали б уявлень про площину, відстань між предметами, їхній розмір; без арифметики з її простими правилами ми не могли б, наприклад, визначити співвідношення між катетом і гіпотенузою трикутника або діагональ квадрата. Кант наголошує, що будь-які математичні операції (як геометричні, так і арифметичні) потребують залучення як простору, так і часу. «Без геометрії ми б не знали, – підкреслює Кант, – що можливий певний розмір. Без арифметики (ще до алгебри) ми також не мали би поняття про діагональ квадрата. Не величина часу (бо це означало б коло в поясненні), а форма часу має значення при оцінці розміру. Але без простору сам час не можна було б уявити як величину, і це поняття взагалі не мало би предмета. Числові поняття потребують саме таких чистих чуттєвих образів [reinsinnlicher Bilder]» [Kant, AA XIV: 54-55/13]. Отож, за Кантом, час як умова можливості арифметичних (і алгебраїчних) понять потребує «чистих» образів, які своєю чергою формуються у «просторовій» формі споглядання, тобто мають стосунок до геометрії, хоч і не редукуються до неї²⁰.

І хоча малюнок, креслення або напис можуть бути нерівними, зробленими поспіхом, не це визначає їхню сутність. Бо емпіричне зображення хоч і є вельми важливим компонентом, як це підкреслює Кант, визначає не геометричну фігуру чи арифметичну дію, а те, що конструюється в «чистому» спогляданні, де активно діють уява і продуктивне виображення.

¹⁸ Майкл Фрідман підтримує Кантове вчення про споглядальний характер математики, зокрема геометрії, привертаючи увагу до Евклідової геометрії у формулюванні вчення про «чисте» споглядання простору, його різноманітних фігур і конструкцій. Дослідник виокремлює так звані діаграмні розуми (diagrammatic reasoning), що імпліцитно супроводжують конструювання геометричних фігур. Таке мислення спирається на Евклідову геометрію і, як підкреслює Фрідман, лише частково пояснює, яким чином «чисте» споглядання «працює» при конструюванні фігур [Friedman 2012: 252-255]. Зазначимо, що такий діаграмний спосіб мислення запропоновано відомим американським філософом Кенетом Мандерсом [Manders 2008]. До його праць часто апелює Фрідман, формулюючи, щоправда, власні висновки.

¹⁹ Адже вони конструюються за допомогою різних форм споглядання – часу (арифметика і алгебра) і простору (різні типи геометрії).

²⁰ Щодо цього взаємозв'язку Кант зазначає також: «Якби ми не мали поняття простору, величина $\sqrt{2}$ не мала би для нас жодного значення, бо тоді кожне число можна було б уявити як сукупність неподільних одиниць. Тепер ми уявляємо собі лінію як таку, що породжується рухом, тобто в часі, в якому ми не уявляємо нічого простого йі можемо думати про $1/10$, $1/100$ і т.д. від даної одиниці» [Kant AA XIV: 53/13]. До речі, у підготовчих працях проти Йогана Ебергарда, а потім і в самому трактаті «Про одне відкриття, після якого всяка нова критика чистого розуму є зайвою через старішу» Кант розглядає ідеї цього вельми відомого лйбніціанця стосовно певних різновидів часу. Зокрема, Кант цитує ті місця статті Ебергарда «Über die logische Wahrheit oder die transscendentale Gültigkeit der menschlichen Erkenntniß» (1789), де німецький лйбніціанець встановив розрізнення конкретного часу (die concrete Zeit) і абстрактного часу (die abstracte Zeit), пов'язавши це розрізнення з математикою. Отож, Кант занотовує те місце, де вказується, що «конкретний час складається із простих елементів, і це – уявлення. Прості елементи (як такі) ніколи не можна відчуті окремо (хоча вони, тим не менш, перебувають у часі), але вони завжди відчуються з чимось, що передує і слідує за ними (отже, можна припустити, що конкретний час складається з простих елементів)» [Kant AA XX: 356]. Дещо інакше виглядає абстрактний час, і цей момент Кант також не залишив поза своєю увагою: «Те, що в конкретному часі є уявленнями, в абстрактному часі є змінами, які відбуваються безперервним потоком. Елементи абс-

b) Вільям Гамільтон про алгебру як «науку про чистий час»: кантівські мотиви

Видатний ірландський математик XIX ст. Вільям Ровен Гамільтон (1805–1865) запропонував розглядати алгебру як науку про чистий час (Science of Pure Time). Такий своєрідний погляд на математичну дисципліну (як і на арифметику і геометрію) значною мірою сформувався під Кантовим впливом, про це ірландський математик неодноразово писав у своїх працях. Зокрема, у відомих «Lectures on quaternions» він прямо вказує на Кантову трансцендентальну естетику як основу для свого розуміння алгебри не лише як особливої символічної мови й операцій із числовими рядами та співвідношеннями, а як науки, що так само залежить від суб'єктивного часу, як геометрія – від простору.

трактного часу не мають нічого безпосередньо споглядального, вони мають це опосередковано в конкретному часі, але математика доводить протилежне не тільки для сприйняття, а й для самого часу» [Kant AA XX: 356].

Аналогічні міркування Ебергард наводить стосовно простору, також розрізненого на конкретний і абстрактний. Вочевидь ці міркування відомого лйбніціанця не вдовольняли Канта з кількох причин, на які він вказує: «Доказ базується на двох твердженнях: по-перше, що конкретний час і простір складаються з простих елементів; по-друге, що ці елементи, утім, не є чуттєвими, вони – сутності розсуду. Ці твердження водночас є вельми хибними, бо перше суперечить математиці, а друге – самому собі» [Kant AA VIII: 202]. Тобто таке розрізнення часових модальностей не є чимось визначальним для трансцендентальної естетики. Бо як «конкретний час» не здатен надати нам якісь «прості елементи» (монади чи атоми), так і «абстрактний час», який відволікається від споглядання й постає як певна раціональна модель, конструкція часу, також не здатен наблизити нас до пізнання «світу явищ», навіть до розуміння того, яким чином відбувається конструювання математичних предметів. За Кантом, математика тісно пов'язана з чуттєвим (хоч і «чистим») спогляданням, але це не «абстрактний час» (продукт інтелекту).

Цікавим моментом Кантової критики є важлива констатація – будь-які інтелектуальні побудови простору і часу не можуть замінити, «підмінити» простір і час як форми споглядання. Кант своєю критикою майстерно продемонстрував нередуковність простору і часу, як суб'єктивних форм, до інтелектуальних конструкцій, чим натхненню займався Ебергард. Крім того, Кант надав нового поштовху своїй критиці монадології Лйбніца, акцентувавши увагу на невідповідності монадології можливостям суб'єктивного споглядання. Це, так би мовити, посилює Кантову позицію щодо неспроможності метафізичного пізнання зазіхати на трансцендентні речі, які не мають жодного стосунку до умов можливого досвіду, і це також надало Канту додаткової впевненості в неможливості математичного пізнання (як синтетичного пізнання а priori) за межами суб'єктивного простору і часу, а також продемонструвало ставлення автора *KrV* до «інтелектуальної топології» як цілком можливої математичної конструкції, проте не здатної виконувати епістемологічну функцію, оскільки остання пов'язана з «чистим» спогляданням. У цьому зв'язку дивним виглядає твердження відомого німецького філософа-неокантіанця, розробника критичної онтології Ніколая Гартмана щодо можливості співіснування різних «геометричних просторів» (Geometrischer Räume), які окрім того, що існують як математичні ідеальні конструкції (як підкреслює Гартман, такі собі математичні апіорні схеми), начебто порізному уявляють ще й реальний простір (Realraum), що також існує. Гартман зазначає: «Якщо існує кілька типів простору, він [реальний простір – *B. K.*] не обов'язково має бути того ж типу, що й простір споглядання... Кожен із цих типів простору має власну систему аксіом... З огляду на цю множинність геометричних просторів, реальний простір є лише окремим випадком, як і споглядальний простір [Anschauungsraum]» [Hartmann 1950: 71]. Тож Гартман вважав за можливе надати всім так званим «типам простору» однаковий епістемологічний статус – геометричним просторам (топології з різною мірою викривлення), ідеальному простору чуттєвого споглядання, реальному простору. Вочевидь Гартман просував добре знайому ще з XIX ст. версію трансцендентального реалізму, тоді як Кант розробляв трансцендентальний ідеалізм, базовою частиною якого є трансцендентальна естетика.

Про це Гамільтон писав цілком відверто і переконливо: «На цю думку мене надихнули деякі уривки з «Критики чистого розуму» Канта, які, як видається, виправдовують сподівання на можливість побудови апіорної науки про час, так само як і науки про простір» [Hamilton 1853: (2-3)]. Кантівським впливом позначені міркування Гамільтона про те, яким чином формується арифметичне вчення про число, як відбуваються арифметичні дії, а також як розгортаються алгебраїчні числові й символічні ряди. Для ірландського вченого все це можливо на основі часової послідовності, а не просто певних операцій над числами і символами. На думку Гамільтона, час відіграє свою (хоч і приховану та для багатьох, навіть математиків, неочевидну) роль у конструюванні алгебраїчних рядів, виражених за допомогою штучної, символічної мови: «Зізнаюсь, що не можу сформулювати чітку концепцію числа без певного зв'язку з думкою про час, хоча цей зв'язок може бути дещо абстрактним і трансцендентним. Я не можу уявити собі, що рахую якийсь набір речей, не впорядкувавши їх і не розглядаючи їх як послідовність, хай би якою довільною і ментальною (або суб'єктивною) була ця передбачувана послідовність. І погодившись почати з абстрактного поняття (або чистої інтуїції) часу як основи викладу цих аксіом і висновків, що мають бути виражені символами алгебри» [ibid.: (15)]. Гамільтон переконаний, що темпоральна послідовність алгебраїчних операцій є не способом їхньої ілюстрації задля «кращого розуміння», а базовою ознакою алгебраїчного міркування. З цього приводу ірландський математик зазначає: «Фундаментальний контраст між думками про минуле і майбутнє, який використовується тут не як звичайна ілюстрація результату, отриманого інакше і символічно виведеного, без будь-якого чіткого розуміння його значення, а як сама основа міркування» [ibid.: (15)]²¹. Це стосується як алгебри, так і арифметики, яка – попри свої «простіші» порівняно з алгеброю природу і математичні операції – також потребує темпорального аспекту для розгортання своїх концептів та операцій з ними.

Гамільтон завжди підкреслював значущість для своєї математичної творчості Кантового вчення про «чистий», апіорний час як підставу для конституювання алгебри. Саме це вчення уможливило видатні успіхи Гамільтона в цій науці. Відомо, що він є одним із піонерів у розробці концепції кватерніонів (Quaternions), досить інноваційного напрямку алгебри, що згодом суттєво вплинув на розвиток сучасної топології.

В одному з ранніх своїх досліджень ірландський математик зазначав: «Аргумент на користь висновку, що поняття часу може бути розгорнуте в самостійну чисту науку або що наука про чистий час можлива, ґрунтується головним чином на існуванні певних апіорних інтуїцій, пов'язаних із цим поняттям часу й покликаних стати джерелами чистої науки, а також на фактичному виведенні такої науки з тих принципів, до яких, як вважає автор, він підійшов» [Hamilton 1837: 296-297]. Згідно

²¹ Як зазначає сучасний дослідник Джон Гендрі, саме розуміння алгебри як науки про час уможливило Гамільтонову концепцію кватерніонів: «Есе Вільяма Ровена Гамільтона 1835 року про алгебру як науку про чистий час займає важливе місце в історії математики. За словами самого Гамільтона, це стало основою для його пізнішого кватерніонного числення, одним з наслідків якого стала теорія векторного аналізу» [Hendry 1984: 63]. Таким чином, можна стверджувати, що ознайомлення з філософією Канта, його трансцендентальною естетикою стало вирішальним фактором для математичної творчості Гамільтона. Така «відданість» Кантовій теорії математики вирізняла ірландського математика як з-поміж переважної більшості його тогочасних колег, так і з-поміж колег пізніших часів.

з поглядами ірландського математика, час як інтуїція глибше закорінений у людському розумі, ніж простір, хоча математика у своєму розгортанні передбачає як час, так і простір: «Поняття або інтуїція ПОРЯДКУ В ЧАСІ є не менш, а більш глибоко закоріненими в людському розумі, ніж поняття або інтуїція ПОРЯДКУ В ПРОСТОРИ; і математична наука може бути заснована на першому так само чисто й демонстративно, як і наука, заснована на другому. Існує щось таємниче і трансцендентне в ідеї Часу, але є також щось визначене і ясне, і коли метафізики розмірковують про одне, математики можуть міркувати про інше» [ibid.: 297]. Арифметика, згідно з Гамільтоном, також потребує часового вектору, бо вона як «наука про підрахунок є, таким чином, частиною науки про чистий час, але частиною настільки простою і знайомою, що можна вважати, ніби кожен, хто починає вивчати алгебру, уже в тій чи іншій мірі вивчав раніше й окремо арифметику» [ibid.: 308]. Як бачимо, ірландський математик досить переконливо продемонстрував дієвість Кантового вчення про математику, зокрема алгебру, надаючи цій дисципліні статусу «чистої науки про час».

Гамільтон не лише констатує темпоральність алгебраїчних дій, а й показує як це відбувається, так би мовити, практично, у процесі алгебраїчного розв'язання певних задач. Більше того, він доводить часовий компонент майже всіх алгебраїчних функцій, навіть відкриття логарифмів він пов'язує не з арифметичними властивостями степенів чисел, а зі спогляданням неперервної прогресії, яку відкрив математик Джон Нептер і виклав у трактаті «Canon Mirificus» (1614). Гамільтон зазначає, що цей вчений вказав на флюксії, швидкості й час як на основу ефективності логарифмів [Hamilton 1837: 296-297]. Флюксії, на думку Гамільтона, треба розглядати як швидкості, що змінюють величини. Тож це часова функція, бо де є зміни і прогресія, там є і час, навіть якщо цей час для нашої свідомості має вигляд миттєвого. Адже ми не можемо схопити ті часові кванти, упродовж яких ця прогресія розгортається.

Прикметно, що переконання в дієвості Кантового вчення про «споглядальну» природу математики ірландський вчений впевнено демонстрував у більшості своїх досліджень, пов'язуючи з ним свої творчі успіхи в різних математичних дисциплінах.

3. То чи можлива Кантова філософія математики?

То чи можлива філософія математики у річищі Кантового трансцендентального ідеалізму? Вище ми показали, за яких трансцендентальних пресупозицій відбувається конституювання математичних предметів. Та чи є це філософією математики? Відповідь на це питання вимагає уважнішого розгляду різних Кантових текстів, зокрема його нотаток (рефлексій) і манускрипту *Opus Postumum*. Ця незавершена праця німецького філософа, власне великий рукописний текст, присвячена проблемі переходу (*Übergänge*) від апріорних засад метафізики природознавства до фізики. Відомо, що це питання турбувало Канта в останні 8-10 років його життя.

З-поміж чималого переліку різноманітних питань, розглянутих у цьому рукописі, вартий уваги Кантів аналіз взаємозв'язку філософії, природознавства і математики. Аналіз цієї проблеми німецький філософ розпочинає з розгляду назви праці Ньютона – «*Philosophiae naturalis principia mathematica*», оскільки назва, як зазначає німецький філософ, маніфестує намір британського вченого – відслідкувати математичні засади «*Philosophiae naturalis*». Кант акцентує увагу на невідпо-

відності цієї назви методам, якими Ньютон у цьому трактаті досліджував природні явища. Канта не влаштовує намір досліджувати природу за допомогою математичних принципів, бо це не відповідає його розумінню природи як досвідної науки, яка уможливорюється апіорними категоріями, принципами, аналогіями, схемами досвіду тощо²². Водночас німецький філософ не вважає за можливе назвати цей трактат якимось інакше, наприклад – «*Philosophiae naturalis principia Philosophica*», бо ця назва тавтологічна.

Отже, критична налаштованість до назви Ньютонового трактату й, таким чином, до математичних методів дослідження природи свідчить про певну позицію Канта щодо більш значущого питання: чи можлива редукція природознавства до математичних або філософських засад. Насправді, згідно з Кантом, ми маємо справу зі «*scientiae naturalis*», а не з якимись різновидами «*philosophiae naturalis*», які для пізнання природи потребували б математичних чи філософських засад. Зрештою, висновок Канта такий: «...не існує математичних засад природознавства, як і філософських засад математики. Обидві [ці науки] відокремлені одна від одної нездоланною прірвою, і хоча вони відштовхуються від апіорних принципів, перша робить це зі споглядання, а друга – із апіорних понять, тож різниця надто значна, наче у переході від однієї до іншої той самий розум (адже це й означає пізнання а priori) переносить нас до цілком різних світів» [Kant XXII: 543]. Філософія (точніше – метафізика) зацікавлена «світом надчуттєвим», тоді як природознавство і математика, обоє на власний кшталт, у своєму пізнанні змушені апелювати до «світу споглядання».

То яке значення має оце «розрізнення світів», з якими працюють математика і природознавство в сенсі «*scientiae naturalis*», і філософія (причому і як «*philosophia naturalis*», і як трансцендентальна філософія)? На нашу думку, це розрізнення безпосередньо стосується питання про можливість філософії математики. Кант увиразнив свою позицію щодо якоїсь можливої філософії математики в чіткій формулі: «Так само безплідно й непослідовно філософувати в галузі предметів математики, як і намагатися досягти прогресу у філософії за допомогою математики» [Kant XXII: 543-544]. І це попри те, що й у філософії, і в математиці треба мати талант і вміло послугувуватись розумом.

Проте, нагадує Кант, розум у філософії і в математиці застосовується – по різному. У філософії розум відіграє провідну роль, бо в цій сфері пізнавальна активність розгортається дискурсивно, на основі понять. Тоді як у математиці пізнання відбувається на основі конструювання предметності в спогляданні, у формах простору і часу, в яких розум відіграє важливу, але все ж допоміжну роль. Адже вміння обговорювати, аналізувати математичні поняття не визначає їх природу. Остання залежить не від логічних визначень (хоча несуперечливість цих визначень важлива, але недостатня), а від конструктивної природи цих понять, їхнього розгортання в «числотому», суб'єктивному просторі й часі. Кант зазначає: «Цілком може статися, що

²² Звісно, Кант ніколи не заперечував застосування математичних методів до дослідження природи, навпаки – всіляко наполягав на такому застосуванні: «Я стверджую однак, що в кожному конкретному вченні про природу можна знайти стільки *справжньої* науки, скільки в ній міститься *математики*» [Kant IV: 470]. Але Кант заперечував можливість повної редукції природознавства до математики, а також підміну природознавства математикою. Згідно з Кантом, це неможливо з огляду хоча б на те, що не всі поняття природознавства можна конституювати в апіорному спогляданні, а саме це характерно для математичних предметів.

предмети математики (геометричні) будуть обговорюватися дискурсивно, але, звичайно, безрезультатно; у кращому випадку це може бути спроба пролити світло на різницю між філософемами [Philosopheme] та математемами [Mathematemen]» [Kant XXII: 543]. Тож дискурсивний погляд на математичні предмети є вельми обмеженим, адже не забезпечує синтетичного пізнання. А саме це питання перебувало в центрі Кантових розмислів про математику.

Тому намагання підмінити дискурсивним аналізом математичних понять математичне пізнання на основі споглядання «не приносить реальної користі цій науці» [Kant XXII: 544]. Цей висновок Кант ілюструє кількома прикладами з геометрії, в яких демонструє відмінність дискурсивного визначення геометричних фігур, з опертям на логічні підстави, від їхнього пізнання на основі конструювання, побудови цих фігур у спогляданні. Кант переконаний, що таке конструювання уможливорює синтетичне пізнання, у той час як дискурсивне визначення математичних понять може претендувати на аналітичне пізнання. А що математика, її дисципліни є синтетичним пізнанням, у Канта не виникало жодного сумніву. Заперечення цієї констатації означає відмову від наукового статусу математики, бо хіба може наукове пізнання (а математика є саме таким пізнанням, це Кант з'ясував у трансцендентальній естетиці) виконувати свої функції без здатності продукувати синтетичне пізнання?

Щодо апіорного споглядання як базової передумови математичного конструювання, зокрема, у геометрії, Кант зазначав: «Таким чином, усі геометричні принципи, наприклад – те, що в трикутнику дві сторони разом більші за третю, ніколи не виводяться із загальних понять лінії та трикутника, а впливають із споглядання, причому а пріорі, з аподиктичною достовірністю» [Kant AA III: 53/A25/B40].

Таким чином, жодне абстрактно-логічне визначення трикутника, квадрата, ромба тощо не замінить їхньої побудови в суб'єктивному просторі. Так само й уміння визначати число та його властивості (ціле, натуральне, комплексне число) не тотожне вмінню здійснювати операції з числами, яке спирається, як зазначав Кант, на суб'єктивний час. І це стосується, як зазначалось вище, і алгебраїчних операцій – вони також темпоральні.

Кант писав про це і в *KrV*, підкреслюючи неспроможність дискурсивного аналізу математичних понять виконувати належним чином функцію математичного пізнання [Kant, AA III: 471/A717/B745]. Тобто у сфері математики недостатньо оперувати абстрактними математичними поняттями, як і категоріями розсуду, а отже – редукувати математику до якихось наративів про її особливості чи спрямовувати зусилля на концептуальні, категоріальні засади математики в цілому або ж окремих її дисциплін. Такі наративи цілком прийнятні, але вочевидь ефективне математичне пізнання не може обійтися без звернення до конструювання своїх понять у формах споглядання, навіть якщо це потребує залучення певних раціональних елементів і алгоритмів побудови фігур, арифметичних дій з числами, алгебраїчних операцій з числовими рядами – усе це працює не дискурсивно, а конструктивно-споглядално. Прикметно, що Кант прямо зауважує стосовно неможливості суто дискурсивного пізнання в математиці: «Жодна математика не може виникнути з дискурсивного пізнання» [Kant AA XVIII: 243/5593]. У кращому разі математичне пізнання, що спирається лише на дефініції (номінальні) понять, не можна визнати аподиктичним, якщо воно не звертається до демонстрації і споглядання: «Математичне пізнання як пізнання розуму а пріорі є аподиктичним, а як

споглядальне є демонстративним, а в поєднанні обох – очевидним» [Kant AA XVIII: 243/5593]. Тож Кант не відкидає логіко-концептуальні визначення математичних предметів, а підкреслює ту обставину, що такі визначення не розв'язують проблеми синтетичності математичного пізнання²³. Кант ніколи не відмовлявся від «чистого» споглядання як вирішальної суб'єктивної спроможності, що, з одного боку, уможлиблює конструювання математичних предметів, а з іншого – є основою, підґрунтям для філософського аналізу математики. І обидва ці рівні – конструювання та філософського аналізу – дослідження математики тісно пов'язані з трансцендентальною філософією. Дехто вважає за можливе від цієї особливості Кантового погляду на математику відмовитись або принаймні її обмежити задля якихось новіших філософських моделей математики, що цілком прийнятно, але це не відповідає вимогам Кантового трансценденталізму, його розумінню природи математичних предметів, і що найважливіше – розумінню німецьким філософом сутності математичного пізнання, *синтетичної* природи математики.

Добре відомо, що критика Кантового вчення про особливості математичного пізнання (зокрема, тези про його тісний зв'язок із суб'єктивними формами простору і часу, людською чуттєвістю) розгорнулася із особливою силою від початку XIX ст. і триває дотепер. Перелік критично налаштованих математиків, логіків і філософів вельми значний: Карл Гаус, Йоган Герберт, Микола Лобачевський, Готлоб Фреге, Георг Кантор, Джузеппе Пеано, Ріхард Дедекінд, Луї Кутюра, Бертран Расел, Альфред Норт Вайтгед, Пауль Наторп, Ернст Касирер, Леопольд Кронекер, Френк Ремзі, Курт Гьодель, Герман Вейль, Ян Брауер, Давид Гільберт, Яако Гінтікка, Вілард Квайн і багато інших відомих дослідників. Це питання активно дискутується сучасними фахівцями, різними за спрямованістю й філософськими уподобаннями. У цьому зв'язку варто згадати важливе дослідження Йорга Нойнгайзера, в якому виокремлюється кілька напрямків у царині сучасної філософії математики – інтуїтивізм, конструктивізм, логіцизм, формалізм та ін. [Neunhäuser 2019]. Кожен із цих напрямків має власні візії щодо природи математики, обґрунтованості її базових концептів, можливостей математичного пізнання. Між ними точаться суперечки, дискусії щодо способів, методів обґрунтування математики. Але варто підкреслити головне: попри всі можливі відмінності ці напрямки об'єднує, на різний кшталт, відмова від споглядальної функції математики. У цьому суть, на наш погляд, сучасної філософії математики – це не просто концептуальний погляд на математику як універсальну науку про просторові, кількісні, числові та символічні співвідношення, це намагання надати математичному пізнанню твердого підґрунтя, перш за все логічного, хоча в цьому плані й дотепер точаться дискусії щодо можливості редукції математики до логіки. Вочевидь усі небували успіхи логіки не можуть суттєво підважити Кантове вчення про математику, оскільки, строго кажучи, переважна більшість спроб побудувати філософію

²³ Наприклад, трикутник і його різновиди – рівнобедрений, рівносторонній тощо – ми можемо визначити суто дискурсивно, але для математичного пізнання цього недостатньо, бо необхідно побудувати відповідні фігури в «просторовому» спогляданні з залученням сили виображення. У різних текстах і нотатках німецький філософ підкреслював цю базову специфіку геометричних предметів для пізнання, а не просто для дискурсивного визначення цих фігур як предметів геометрії. Для Канта дискурсивне визначення здатне надати цим фігурам статус *аналітичного* знання, але не *синтетичного* пізнання, оскільки останнє пов'язане з конструюванням цих фігур у суб'єктивному просторі.

математики шляхом відмови від Кантового трансцендентального проєкту математики не відповідають намірам німецького філософа, тож б'ють повз ціль²⁴.

Прикметною є позиція відомого німецького неокантіанця Пауля Наторпа, який обстоював категоріальний, а не «споглядальний» статус простору і часу, а це зумовлює первинність концептуального визначення основних математичних понять, що й формує математику як логіко-дедуктивну, а не «споглядальну» науку. Наторп вважав, що Кант (імпліцитно) припускав первинну категоризацію чуттєвого споглядання, оскільки категорії кількості, числа, міри, степеня супроводжують чуттєве споглядання, структурують чуттєвий матеріал ще до «повноцінної» участі категорій розсуду в синтезі досвіду. Саме це визначає математичні предмети, їхню залежність від розсуду, його категорій, тоді як («чисте») споглядання виконує функцію «супроводу» такої категоризації, бо споглядання не є чимось когнітивно вагомим без участі розсуду, його активних дій. Щодо залежності чуттєвого споглядання від категорій розсуду Наторп зазначає: «Закони часу і простору впливають із законів величини, із додаванням умови повної визначеності єдиного порядку, який об'єднує всі сумісні напрямки величини. Кант мав на увазі цю конкретну властивість, коли відрізняв час і простір як «споглядання» від простих понять і відповідно призначив їм місце не в трансцендентальній логіці, а окремо від неї в трансцендентальній естетиці» [Natorp

²⁴ Відомо, що Бертран Расел пов'язував філософію математики з елімінацією часового компонента, якщо йдеться про арифметику, надаючи в її обґрунтуванні перевагу теорії множин, теорії типів. Це, до речі, мало як позитивні, так і негативні наслідки, пов'язані з виявленням антиномій чи парадоксів. Ця елімінація відповідала меті логіцизму – редукувати математику до логіки, для чого потрібно було суттєво модифікувати традиційну логіку в бік математичної логіки. Нічого такого Кант не передбачав, для нього логіка існувала у двох видах – формальна логіка аристотелівського гатунку, яка розв'язувала питання, пов'язані з правильним і несуперечливим мисленням, і його власна трансцендентальна логіка, яка розв'язувала епістемологічні питання. Згідно з Кантом, формальна логіка продукувала аналітичні істини, у той час як нова, трансцендентальна логіка встановлювала *умови можливості* синтетичних істин, як апостеріорних, так і апіорних.

У цьому контексті привертає увагу те, як в одному ранньому варіанті логіцизму Расел заперечує темпоральність арифметичних дій. Він наголошує на логіко-математичному визначенні арифметичних понять і правил оперування цими поняттями, визначенні, яке начебто передєе будь-яким арифметичним маніпуляціям із цими поняттями: «Стосовно думки, що арифметика залежить від часу, то на це також, сподіваюся, відповів наш розгляд зв'язку арифметики з логікою. Дійсно, окрім будь-яких деталей, це [темпоральність арифметики. – В. К.], здається, спростовується тим простим спостереженням, що час мусить мати частини, а тому множинність, ціле та частини передують будь-яким теоріям часу. Уся математика ... виводиться з простих положень формальної логіки» [Russell 2010: 464]. Як бачимо, ідея Расела проста й очевидна: оскільки категорії множини, цілого і частин як логічні маркери передують часовим вимірам, то арифметику цілком можливо редукувати до логіки, щоправда – саму логіку потрібно суттєво трансформувати. У розвідці «Раселове вчення про простір і час у зв'язку з трансцендентальною естетикою Канта» ми проаналізували спробу Расела обґрунтувати математику засобами логіки, показавши, яких зусиль йому довелося докласти задля «спростування» споглядальної функції математики. І як швидко з'ясувалося те, що таке «спростування» не стало доконечним [Козловський 2024]. Отже, Кантова так звана «філософія математики» потребує ретельного аналізу різноманітних джерел (а їх чимало) задля розуміння того, в яких питаннях Кант мав рацію з позиції сучасної філософії і науки (фізики, математики, логіки, інформатики тощо), а в яких його погляди на простір і час варто скоригувати, а то й переглянути. І чи стосується цей перегляд саме трансцендентального розуміння простору і часу в цілому, ролі людської чуттєвості в конструюванні математичних структур, чи, можливо, перегляду потребує логічне обґрунтування математики. Вочевидь це дещо різні, хоч і взаємопов'язані питання, які потребують ретельного вивчення.

1910: 46]. Хоча насправді простір і час, на думку Наторпа, визначаються не як форми споглядання, а як «способи, якими різноманіття явищ “упорядковується в певних відношеннях”, а саме у відношеннях наступності та співіснування, отже функція споглядання полягає в наблизженні до функції мислення» [Natorp 1910: 46].

Попри таку «раціоналізацію» суб'єктивних форм простору і часу, Наторп із певною підозрою розглядав логіцизм Кутюра, Вайтгеда і Расела, їхню критику «споглядальної» функції математики. З одного боку, він займав критичну позицію щодо ролі чуттєвого споглядання в конструюванні математичних понять, підкреслюючи базове значення категорій розсуду – кількості, числа, відношення тощо. З іншого боку, надто радикальний логіцизм цих відомих математиків і філософів його також не влаштовував. Наторп не підтримував ті інновації, яких зазнала логіка під орудою цих вчених, бо це вело до поступового, але невблаганного перетворення традиційної логіки на нове концептуальне утворення – математичну логіку. Наторп критично сприймав нову логіку, що і зрозуміло з огляду на його орієнтацію на Кантову трансцендентальну логіку. Тому його відмова від Кантової «споглядальної математики» базувалась не на логіцистських, а на епістемологічних аргументах. Фактично німецький неокантіанець редукує трансцендентальну естетику, звівши – із деякими застереженнями, до трансцендентальної логіки²⁵. Саме це стало показовим концептуальним кроком німецького неокантіанця, його оригінальним внеском у тлумачення трансцендентальної естетики, а отже й математики.

Постає питання: чи виправдана така інтерпретація трансцендентальної естетики, вчення про математичне пізнання? Ми переконані, що якби простір і час виконували функцію категорій розсуду, то ми мали б можливості їх конструювати, моделювати, модифікувати задля розширення пізнання світу. Тоді кожна нова топологічна конструкція свідчила би про те, що ми маємо можливість відкинути попередні концептуальні моделі простору і часу як застарілі. Отже, таке тлумачення імпліцитно передбачає, що модальності нашого чуттєвого сприйняття світу також оновлюються, і ми маємо нові можливості чуттєвого споглядання, нові форми організації нашого досвіду, які добре узгоджуються з новими топологічними конструкціями. Але всі такі сподівання не відповідають нашим когнітивним можливостям, які суттєво залежать від нашої антропології, можливостей нашої чуттєвості, як і стверджував Кант у *KrV* [Kant AA III: 49/B33]. Тож можливості трансформації нашої чуттєвості, а отже – застосування нових топологічних конструкцій не лише як теоретичних моделей, а як нових форм чуттєвого споглядання, не відповідають трансцендентальним перспективам Кантового філософування. І математичне пізнання, згідно з Кантом, мусить враховувати ці трансцендентальні перспективи, а не послуговуватись винятково логічним (номінальним) визначенням математичних понять²⁶.

Відомий сучасний філософ і логік Яакко Гінтікка підкреслює, що кантівська теза, згідно з якою математичні предмети не є суто раціональними конструкціями, побудовами розуму, і, зрештою, не редукуються до логіки, має під собою деякі резони. Гінтікка вважає, що з цим можна погодитись, однак із деякими уточненнями, що, з

²⁵ Так звану формальну логіку, яку, як відомо, Кант викладав студентам університету, німецький неокантіанець не вважав вартою особливої уваги. Більш детальний розгляд його аргументів на захист категоріального статусу математичних предметів вартий окремого дослідження. Це цікава сторінка історії кантознавства.

²⁶ Особливості Кантового розуміння антропологічних засад трансцендентальних форм чуттєвого споглядання проаналізовано в нашому дослідженні [Козловський 2024а: 86-92].

одного боку, усувають звертання до емпіричного досвіду, також залежного від чуттєвого споглядання. З іншого боку, фінський логік не вважає, що в Канта йдеться про суб'єктивну силу уяви, за допомогою якої в математиці конструюють предмети. Тож фінський логік дещо змінює модальність споглядання (intuition) у бік більш раціонального тлумачення, проте не дискурсивного. Те, що математичні предмети конструюються в спогляданні, для Гінтіки означає, що вони утворюються в чистому (апріорному) спогляданні. Тобто Гінтіка підтримує позицію Канта, хоча з певними змінами: «Це [споглядання без предмета. – В. К.] передбачає: те, що Кант мав на увазі під спогляданням, це просто ті уявлення [Vorstellungen], які унаочнюють свої предмети як окремі, без допомоги загальних понять» [Hintikka 1984: 101]. Тож Гінтіка «додає» до чуттєвого споглядання ще одну суб'єктивну форму – уяву, яка активно бере участь у конструюванні математичних предметів, що, як ми вище показали, відповідає Кантовому розумінню природи математичного пізнання, його синтетичній природі.

У Кантових нотатках з математики, як зазначено вище, підкреслювалась роль уяви і сили виображення в конструюванні математичних предметів у арифметиці та алгебрі. У *KrV* німецький філософ пише про простір і геометрію, підкреслюючи залежність останньої від продуктивного виображення: «Рух об'єкта в просторі не належить до чистої науки, а отже й до геометрії, бо те, що щось є рухомим, не може бути пізнане а priori, а лише через досвід. Але рух як опис простору є чистим актом послідовного синтезу багатоманітного в зовнішньому спогляданні взагалі через продуктивну силу виображення й належить не тільки до геометрії, але навіть до трансцендентальної філософії» [Kant AIII:122-123/B/155-156]. Рух, що відбувається в суб'єктивних формах простору і часу, опосередкований уявою і продуктивним виображенням, належить до трансцендентальної філософії, оскільки вона досліджує форми, завдяки яким відбувається синтез знання, зокрема й у математиці. Гінтіка наголошує, що математичне конструювання відбувається як «ідеально-чуттєва» репрезентація індивідуальних математичних предметів, що розгортаються у суб'єктивних структурах чуттєвого споглядання. Та цього недостатньо для індивідуальних предметів математики, з якими мають справу, коли конструюють їх у формах споглядання, як на цьому наголошує Кант. Гінтіка вважає, що для математичного пізнання необхідна ще одна суб'єктивна передумова – активна участь уяви в конструюванні математичних предметів.

Кант усвідомлював особливості конституювання математичних предметів, розрізняючи за способом конституювання предмети геометрії, арифметики й алгебри. Між цими математичними дисциплінами є певні відмінності, із чим необхідно завжди рахуватись, конструюючи їхні предмети. Наприклад, алгебра використовує не число (як арифметика), а спеціально створені знаки (буквені символи і числові співвідношення, формули), які розгортаються в «чистому» (суб'єктивному) часі, тоді як поняття геометрії потребують просторових конфігурацій, причому вельми специфічних з огляду на різні розділи цієї дисципліни – стереометрії, планіметрії, тригонометрії, аналітичної геометрії тощо. У певному сенсі й геометричні предмети мають стосунок до часу, бо їхнє конструювання передбачає і потребує певного часу, та не це визначає їхню природу, а саме «чистий простір», апріорна структура свідомості, що організовує (задає форму) можливість конструювання геометричних фігур.

І найголовніше, на що варто зважати: для Канта математичні дисципліни виконують пізнавальну функцію, щоправда – в сенсі не дискурсивного пізнання, а конст-

руювання предметів [Kant AA III: 471/A717/B745]. Кант чітко й послідовно підкреслює, що в царині математики не достатньо оперувати абстрактними концептами розсуду. Адже неможливо редукувати математику до якогось наративу про її особливості чи обмежити її пошуками концептуальних, категоріальних засад, які начебто є надійними підмурками математики, її окремих дисциплін. Такі дослідження цілком можливі, але цього замало, бо для ефективної «роботи» математики як синтетичного пізнання, згідно з Кантом, ми не можемо обійтися без «чистих» форм споглядання. І то навіть якщо вони включають певні раціональні елементи й алгоритми побудови фігур, операції з числами, символізацію числових рядів – усе це має епістемологічний сенс не в дискурсивному, а в споглядальному плані. Саме тут – основа синтетичної сили математики, на чому Кант завжди наголошував, визнаючи за цією «чистою» споглядальністю вирішальне значення як у конструюванні математичних предметів, так і у філософському аналізі математики, тісно пов'язаному для автора *KrV* із трансцендентальною філософією.

Філософія математики не може мати самостійного значення як окрема частина Кантового трансцендентально-філософського дискурсу. Для Канта, і це впливає з усього його теоретичного спадку (а це й нотатки, матеріали лекцій, листи), математика пов'язана з конструктивною діяльністю у сфері «чистого» споглядання, а не з дискурсивним аналізом математичних концептів. Саме в цьому, «споглядальному» контексті варто розмірковувати про особливості математичних предметів із позиції Кантової трансцендентальної філософії. Це означає, що простір і час як суб'єктивні форми споглядання, з одного боку, формують емпіричний досвід (є одним із базових факторів такого формування), з іншого – вони уможливають конструювання математичних предметів, причому кожен крок конструювання, залежно від математичної дисципліни, у різний спосіб має стосунок до цих суб'єктивних форм. Щодо особливостей конструювання математичних предметів Кант зазначає: «Ми не можемо уявити лінію, не провівши її подумки, не можемо уявити коло, не описуючи його, не можемо навіть уявити три виміри простору, не провівши три перпендикулярні лінії з однієї точки, і навіть час не можемо мислити інакше, як звертаючи увагу на проведення прямої лінії (яка має бути зовнішнім фігурним уявленням часу)» [Kant AA III: 121/B154].

І все ж першість (*prīus*) належить не математичному конструюванню в просторі і часі, а простору і часу як суб'єктивним (апріорним) умовам можливості емпіричного досвіду. Трансцендентальна філософія окреслює апріорні умови конституювання досвіду як універсальної даності (*Gegebenheit*) феноменального світу, а не світу трансцендентних речей. Саме це, за Кантом, уможливує аподиктичність математичного пізнання.

Висновки

1. Кантове вчення про математику є частиною трансцендентальної естетики, тому воно залежить від розрізнення явищ і речей самих по собі. Арифметика, геометрія й алгебра, до яких звертався Кант, аналізуючи в різних працях, рукописах і нотатках (рефлексіях) особливості їхнього конструювання, уможливлюються суб'єктивними («чистими», апріорними) формами чуттєвого споглядання: простором і часом.

2. Математичне пізнання ґрунтується на «чистому» спогляданні, яке, з одного боку, є чуттєвим, з іншого ж – це така чуттєвість, яка надає можливість конструюва-

ти математичні предмети (геометричні фігури, арифметичні числення), розгортати алгебраїчні символічно-числові ряди тощо.

3. Цим уможлиблюється здатність математики продукувати синтетичне пізнання а *priori*, а не просто аналітичні судження, характерні для пізнання, заснованого на «чистих» поняттях. До царини останнього належать метафізика або в деяких випадках і математика: коли ми не визначаємо поняття, не намагаючись їх увиразнити як певні конструктивні предмети, що розгортаються в суб'єктивному («чистому») просторі і часі.

4. Для описаної вище конструктивної діяльності в царині математики необхідно залучати такі «сили душі», як уява та продуктивна сила виображення.

5. Вельми проблематичним є твердження про те, що Кант створив щось на кшталт «філософії математики». Аналіз продемонстрував, що Кантова концептуальна позиція не потребувала якоїсь «додаткової» філософії математики, яка би «доповнювала» трансцендентальну естетику, його вчення про математику. Адже це вчення звернене до умов можливості пізнання, а не до логічного обґрунтування засад математики.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

- Козловський, В. (2024). Раселовое вчення про простір і час у зв'язку з трансцендентальною естетикою Канта. *Sententiae*, 43(2), 6-32. <https://doi.org/10.31649/sent43.02.006>
- Козловський, В. (2024a). Кантове вчення про чуттєвість, простір і час: трансцендентальні, антропологічні та природничо наукові конотації. *Sententiae*, 43(3), 8-25. <https://doi.org/10.31649/sent43.02.006>
- Alavi, F. (2020). Reading Kant's doctrine of schematism algebraically. *Philosophical Forum*, 51(3), 315-329. <https://doi.org/10.1111/phil.12261>
- Beth, E. W. (1957). Über Lockes Allgemeines Dreieck. *Kant-Studien*, 48(1-4), 361-380. <https://doi.org/10.1515/kant.1957.48.1-4.361>
- Brittan, G. (1992). Algebra and Intuition. In C. J. Posy (Ed.), *Kant's Philosophy of Mathematics: Modern Essays* (pp. 315-339). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8046-5_13
- Brittan, G. (2020). Continuity, Constructibility, and Intuitivity. In C. Posy & O. Rechter (Eds.), *Kant's Philosophy of Mathematics: Vol. I: The Critical Philosophy and Its Roots* (pp. 181-199). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1017/9781107337596.009>
- Couturat, L. (1965). *Die philosophischen Prinzipien der Mathematik. Kants Philosophie der Mathematik*. Leipzig: A. Kröner
- Eberhard, J. A. (1788). Über die logische Wahrheit oder die transscendentale Gültigkeit der menschlichen Erkenntniß. In J. A. Eberhard, *Philosophisches Magazin* (SS.186-231). Halle: Gebauer.
- Engelhard, K., & Mittelstaedt, P. (2008). Kant's Theory of Arithmetic: A Constructive Approach? *Journal for General Philosophy of Science*, 39(2), 245-271. <https://doi.org/10.1007/s10838-008-9072-y>
- Fazelpour, S., & Thompson, E. (2015). The Kantian brain: brain dynamics from a neurophenomenological perspective. *Current Opinion in Neurobiology*, 31, 223-229. <https://doi.org/10.1016/j.conb.2014.12.006>
- Ferrarin, A. (1995). Construction and Mathematical Schematism Kant on the Exhibition of a Concept in Intuition. *Kant-Studien*, 86(2), 131-174. <https://doi.org/10.1515/kant.1995.86.2.131>
- Foss, L. (1967). Modern Geometries and the «Transcendental Aesthetic». *Philosophia Mathematica*, 1-4(1-2), 35-45. <https://doi.org/10.1093/philmat/s1-4.1-2.35>

- Friedman, M. (2009). Geometry, Construction and Intuition in Kant and his Successors. In *Between Logic and Intuition Essays in Honor of Charles Parsons* (pp. 186-218). Cambridge: Cambridge UP. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511570681.010>
- Friedman, M. (2012). Kant on Geometry and Spatial Intuition. *Synthese*, 186, 231-255. <https://doi.org/10.1007/s11229-012-0066-2>
- Friedman, M. (2020). Space and Geometry in the B Deduction. In C. Posy & O. Rechter (Eds.), *Kant's Philosophy of Mathematics: Vol. I: The Critical Philosophy and Its Roots* (pp. 200-228). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1017/9781107337596.010>
- Hamilton, W. R. (1837). Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time. *The Transactions of the Royal Irish Academy*, 17, 293-423.
- Hamilton, W. R. (1853). *Lectures on quaternions: containing a systematic statement of a new mathematical method, of which the principles were communicated in 1843 to the Royal Irish academy, and which has since formed the subject of successive courses of lectures, delivered in 1848 and subsequent years, in the halls of Trinity college, Dublin*. Dublin: Hodges and Smith.
- Hankins, T. (1977). Hankins Triplets and Triads: Sir William Rowan Hamilton on the Metaphysics of Mathematics. *Isis*, 68, 175-193. <https://doi.org/10.1086/351766>
- Hanna, P. (2002). Mathematics for humans: Kant's philosophy of arithmetic revisited. *European Journal of Philosophy*, 10(3), 328-352. <https://doi.org/10.1111/1468-0378.00165>
- Hartmann, N. (1950). *Philosophie der Natur: Abriß der speziellen Kategorienlehre*. Berlin: De Gruyter.
- Heis, J. (2014). Kant (vs. Leibniz, Wolff and Lambert) on Real Definitions in Geometry. *Canadian Journal of Philosophy*, 44(5-6), 605-630. <https://doi.org/10.1080/00455091.2014.971689>
- Hendry, J. (1984). The evolution of William Rowan Hamilton's view of algebra as the science of pure time. *Studies in History and Philosophy of Science*, 15(1), 63-81. [https://doi.org/10.1016/0039-3681\(84\)90030-X](https://doi.org/10.1016/0039-3681(84)90030-X)
- Hintikka, J. (1967). Kant on the Mathematical Method. *The Monist*, 51(3), 352-375. <https://doi.org/10.5840/monist196751322>
- Hintikka, J. (1969). On Kant's Notion of Intuition (Anschauung). In T. Penelhum & J. MacIntosh (Eds.), *The First Critique: Reflections on Kant's Critique of Pure Reason* (pp. 38-53). Belmont, CA: Wadsworth.
- Hintikka, J. (1984). Kant's Transcendental Method and His Theory of Mathematics. *Topoi*, 3(2), 99-108. <https://doi.org/10.1007/BF00149782>
- Kant, I. (1900 sqq.). *Gesammelte Schriften: Hrsg. von der Preußische Akademie der Wissenschaften; Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin; Akademie der Wissenschaften zu Göttingen (Akademie-Ausgabe, XXIX Bde)*. Berlin: Reimer & De Gruyter.
- Kitcher, Ph. (1992). Kant and the Foundations of Mathematics. In C. J. Posy (Ed.), *Kant's Philosophy of Mathematics: Modern Essays* (pp. 109-131). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8046-5_5
- Kjosavik, F. (2009). Kant on Geometrical Intuition and the Foundations of Mathematics. *Kant Studien*, 100(1), 1-27. <https://doi.org/10.1515/KANT.2009.001>
- Koriako, D. (1999). *Kant's Philosophie der Mathematik*. Hamburg: Felix Meiner Verlag.
- Manders, K. (2008). The Euclidean diagram. In P. Moncosu (Ed.), *The philosophy of mathematical practice* (pp. 80-133). Oxford: Oxford UP. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199296453.003.0005>
- Menzel, A. (1911). Die Stellung der Mathematik in Kants vorkritischer Philosophie. *Kant-Studien*, 16 (1-3), 139-213.
- Natorp, P. (1910). *Logik (Grundlegung und logischer Aufbau der Mathematik und mathematischen Naturwissenschaft) in Leitsätzen zu akademischen Vorlesungen von Paul Natorp*. Zweite, umgearbeitete Auflage. Marburg: N. G. Elwert.
- Parsons, Ch. (1992). Kant's Philosophy of Arithmetic. In C. J. Posy (Ed.), *Kant's Philosophy of Mathematics: Modern Essays* (pp. 43-79). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8046-5_3

- Posy, C. (1984). Kant's Mathematical Realism. *The Monist*, 67(1), 115-134. <https://doi.org/10.5840/monist198467111>
- Posy, C., & Rechter, O. (Eds.). (2020). *Kant's Philosophy of Mathematics. Vol. I: The Critical Philosophy and Its Roots*. Cambridge: Cambridge UP. <https://doi.org/10.1017/9781107337596>
- Reichenbach, H. (1951). *The Rise of Scientific Philosophy*. University of California Press. <https://doi.org/10.1525/9780520341760>
- Russell, B. (2010). *The Principles of Mathematics*. London; New York: Routledge.
- Schönecker, D., & Kim, H. (Eds.). (2022). *Kant and Artificial Intelligence*. Berlin; Boston: De Gruyter.
- Shabel, L. (2004). Kants «Argument from Geometry». *Journal of the History of Philosophy*, 42(2), 195-215. <https://doi.org/10.1353/hph.2004.0034>
- Sutherland, D. (2006). Kant on arithmetic, algebra, and the theory of proportions. *Journal of the History of Philosophy*, 44(4), 533-558. <https://doi.org/10.1353/hph.2006.0072>
- Sutherland, D. (2020). Kant's Philosophy of Arithmetic: An Outline of a New Approach. In C. Posy & O. Rechter (Eds.), *Kant's Philosophy of Mathematics: Vol. I: The Critical Philosophy and Its Roots* (pp.248-266). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1017/9781107337596.012>
- Sutherland, D. (2021). *Kant's Mathematical World: Mathematics, Cognition, and Experience*. Cambridge: Cambridge UP. <https://doi.org/10.1017/9781108555746>
- Vaihinger, H. (1881-1892). *Kommentar zu Kants Kritik der reinen Vernunft* (Bd. 1-2). Stuttgart, Berlin, & Leipzig: Union Deutsche Verlagsgesellschaft.
- Willaschek, M. (1997). Der transzendente Idealismus und die Idealität von Raum und Zeit. Eine 'lückenlose' Interpretation von Kants Beweis in der «Transzendentalen Ästhetik». *Zeitschrift für philosophische Forschung*, 51(4), 537-564.
- Winterbourne, A. T. (1981). Construction and the role of schematism in Kant's philosophy of mathematics. *Studies in History and Philosophy of Science*, 12(1), 33-46. [https://doi.org/10.1016/0039-3681\(81\)90003-0](https://doi.org/10.1016/0039-3681(81)90003-0)
- Young, M. (1984). Construction, Schematism, and Imagination. *Topoi*, 3(2), 123-131. <https://doi.org/10.1007/BF00149784>

Одержано 23.06.2024

REFERENCES

- Alavi, F. (2020). Reading Kant's doctrine of schematism algebraically. *Philosophical Forum*, 51(3), 315-329. <https://doi.org/10.1111/phl.12261>
- Beth, E. W. (1957). Über Lockes Allgemeines Dreieck. *Kant-Studien*, 48(1-4), 361-380. <https://doi.org/10.1515/kant.1957.48.1-4.361>
- Brittan, G. (1992). Algebra and Intuition. In C. J. Posy (Ed.), *Kant's Philosophy of Mathematics: Modern Essays* (pp. 315-339). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8046-5_13
- Brittan, G. (2020). Continuity, Constructibility, and Intuitivity. In C. Posy & O. Rechter (Eds.), *Kant's Philosophy of Mathematics: Vol. I: The Critical Philosophy and Its Roots* (pp. 181-199). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1017/9781107337596.009>
- Couturat, L. (1965). *Die philosophischen Prinzipien der Mathematik. Kants Philosophie der Mathematik*. Leipzig: A. Kröner
- Eberhard, J. A. (1788). Über die logische Wahrheit oder die transscendentale Gültigkeit der menschlichen Erkenntniß. In J. A. Eberhard, *Philosophisches Magazin* (SS.186-231). Halle: Gebauer.

- Engelhard, K., & Mittelstaedt, P. (2008). Kant's Theory of Arithmetic: A Constructive Approach? *Journal for General Philosophy of Science*, 39(2), 245-271.
<https://doi.org/10.1007/s10838-008-9072-y>
- Fazelpour, S., & Thompson, E. (2015). The Kantian brain: brain dynamics from a neurophenomenological perspective. *Current Opinion in Neurobiology*, 31, 223-229.
<https://doi.org/10.1016/j.conb.2014.12.006>
- Ferrarin, A. (1995). Construction and Mathematical Schematism Kant on the Exhibition of a Concept in Intuition. *Kant-Studien*, 86(2), 131-174.
<https://doi.org/10.1515/kant.1995.86.2.131>
- Foss, L. (1967). Modern Geometries and the «Transcendental Aesthetic». *Philosophia Mathematica*, 1-4(1-2), 35-45. <https://doi.org/10.1093/philmat/s1-4.1-2.35>
- Friedman, M. (2009). Geometry, Construction and Intuition in Kant and his Successors. In *Between Logic and Intuition Essays in Honor of Charles Parsons* (pp. 186-218). Cambridge: Cambridge UP. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511570681.010>
- Friedman, M. (2012). Kant on Geometry and Spatial Intuition. *Synthese*, 186, 231-255.
<https://doi.org/10.1007/s11229-012-0066-2>
- Friedman, M. (2020). Space and Geometry in the B Deduction. In C. Posy & O. Rechter (Eds.), *Kant's Philosophy of Mathematics: Vol. I: The Critical Philosophy and Its Roots* (pp. 200-228). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1017/9781107337596.010>
- Hamilton, W. R. (1837). Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time. *The Transactions of the Royal Irish Academy*, 17, 293-423.
- Hamilton, W. R. (1853). *Lectures on quaternions: containing a systematic statement of a new mathematical method, of which the principles were communicated in 1843 to the Royal Irish academy, and which has since formed the subject of successive courses of lectures, delivered in 1848 and subsequent years, in the halls of Trinity college, Dublin*. Dublin: Hodges and Smith.
- Hankins, T. (1977). Hankins Triplets and Triads: Sir William Rowan Hamilton on the Metaphysics of Mathematics. *Isis*, 68, 175-193. <https://doi.org/10.1086/351766>
- Hanna, P. (2002). Mathematics for humans: Kant's philosophy of arithmetic revisited. *European Journal of Philosophy*, 10(3), 328-352. <https://doi.org/10.1111/1468-0378.00165>
- Hartmann, N. (1950). *Philosophie der Natur: Abriß der speziellen Kategorienlehre*. Berlin: De Gruyter.
- Heis, J. (2014). Kant (vs. Leibniz, Wolff and Lambert) on Real Definitions in Geometry. *Canadian Journal of Philosophy*, 44(5-6), 605-630. <https://doi.org/10.1080/00455091.2014.971689>
- Hendry, J. (1984). The evolution of William Rowan Hamilton's view of algebra as the science of pure time. *Studies in History and Philosophy of Science*, 15(1), 63-81.
[https://doi.org/10.1016/0039-3681\(84\)90030-X](https://doi.org/10.1016/0039-3681(84)90030-X)
- Hintikka, J. (1967). Kant on the Mathematical Method. *The Monist*, 51(3), 352-375.
<https://doi.org/10.5840/monist196751322>
- Hintikka, J. (1969). On Kant's Notion of Intuition (Anschauung). In T. Penelhum & J. MacIntosh (Eds.), *The First Critique: Reflections on Kant's Critique of Pure Reason* (pp. 38-53). Belmont, CA: Wadsworth.
- Hintikka, J. (1984). Kant's Transcendental Method and His Theory of Mathematics. *Topoi*, 3(2), 99-108. <https://doi.org/10.1007/BF00149782>
- Kant, I. (1900 sqq.). *Gesammelte Schriften: Hrsg. von der Preußische Akademie der Wissenschaften; Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin; Akademie der Wissenschaften zu Göttingen (Akademie-Ausgabe, XXIX Bde)*. Berlin: Reimer & De Gruyter.
- Kitcher, Ph. (1992). Kant and the Foundations of Mathematics. In C. J. Posy (Ed.), *Kant's Philosophy of Mathematics: Modern Essays* (pp. 109-131). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8046-5_5
- Kjosavik, F. (2009). Kant on Geometrical Intuition and the Foundations of Mathematics. *Kant Studien*, 100(1), 1-27. <https://doi.org/10.1515/KANT.2009.001>

- Koriako, D. (1999). *Kant's Philosophie der Mathematik*. Hamburg: Felix Meiner Verlag.
- Kozlovskiy, V. (2024). Russell's doctrine of space and time in connection with Kant's transcendental aesthetics. [In Ukrainian]. *Sententiae*, 43(2), 6-32. <https://doi.org/10.31649/sent43.02.006>
- Kozlovskiy, V. (2024a). Kant's Doctrine of Sensibility, Space and Time: Transcendental, Anthropological and Natural Science Connotations. [In Ukrainian]. *Sententiae*, 43(3), 81-98. <https://doi.org/10.31649/sent43.03.081>
- Menzel, A. (1911). Die Stellung der Mathematik in Kants vorkritischer Philosophie. *Kant-Studien*, 16 (1-3), 139-213.
- Manders, K. (2008). The Euclidean diagram. In P. Moncosu (Ed.), *The philosophy of mathematical practice* (pp. 80-133). Oxford: Oxford UP. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199296453.003.0005>
- Natorp, P. (1910). *Logik (Grundlegung und logischer Aufbau der Mathematik und mathematischen Naturwissenschaft) in Lehrsätzen zu akademischen Vorlesungen von Paul Natorp*. Zweite, umgearbeitete Auflage. Marburg: N. G. Elwert.
- Parsons, Ch. (1992). Kant's Philosophy of Arithmetic. In C. J. Posy (Ed.), *Kant's Philosophy of Mathematics: Modern Essays* (pp. 43-79). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8046-5_3
- Posy, C. (1984). Kant's Mathematical Realism. *The Monist*, 67(1), 115-134. <https://doi.org/10.5840/monist198467111>
- Posy, C., & Rechter, O. (Eds.). (2020). *Kant's Philosophy of Mathematics. Vol.1: The Critical Philosophy and Its Roots*. Cambridge: Cambridge UP. <https://doi.org/10.1017/9781107337596>
- Reichenbach, H. (1951). *The Rise of Scientific Philosophy*. University of California Press. <https://doi.org/10.1525/9780520341760>
- Russell, B. (2010). *The Principles of Mathematics*. London; New York: Routledge.
- Schönecker, D., & Kim, H. (Eds.). (2022). *Kant and Artificial Intelligence*. Berlin; Boston: De Gruyter.
- Shabel, L. (2004). Kants «Argument from Geometry». *Journal of the History of Philosophy*, 42(2), 195-215. <https://doi.org/10.1353/hph.2004.0034>
- Sutherland, D. (2006). Kant on arithmetic, algebra, and the theory of proportions. *Journal of the History of Philosophy*, 44(4), 533-558. <https://doi.org/10.1353/hph.2006.0072>
- Sutherland, D. (2020). Kant's Philosophy of Arithmetic: An Outline of a New Approach. In C. Posy & O. Rechter (Eds.), *Kant's Philosophy of Mathematics: Vol. I: The Critical Philosophy and Its Roots* (pp. 248-266). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. <https://doi.org/10.1017/9781107337596.012>
- Sutherland, D. (2021). *Kant's Mathematical World: Mathematics, Cognition, and Experience*. Cambridge: Cambridge UP. <https://doi.org/10.1017/9781108555746>
- Vaihinger, H. (1881-1892). *Kommentar zu Kants Kritik der reinen Vernunft* (Bd. 1-2). Stuttgart, Berlin, & Leipzig: Union Deutsche Verlagsgesellschaft.
- Willaschek, M. (1997). Der transzendente Idealismus und die Idealität von Raum und Zeit. Eine 'lückenlose' Interpretation von Kants Beweis in der «Transzendentalen Ästhetik». *Zeitschrift für philosophische Forschung*, 51(4), 537-564.
- Winterbourne, A. T. (1981). Construction and the role of schematism in Kant's philosophy of mathematics. *Studies in History and Philosophy of Science*, 12(1), 33-46. [https://doi.org/10.1016/0039-3681\(81\)90003-0](https://doi.org/10.1016/0039-3681(81)90003-0)
- Young, M. (1984). Construction, Schematism, and Imagination. *Topoi*, 3(2), 123-131. <https://doi.org/10.1007/BF00149784>

Received 23.06.2024

Victor Kozlovskyi

Mathematics in the Light of Transcendental Aesthetics: did Kant Create a 'Philosophy of Mathematics'?

The article is devoted to the criticism of the thesis about the existence of a special 'Philosophy of Mathematics' in Kant's transcendental philosophy. Based on the analysis of the peculiarities of the formation of mathematical subjects, in particular in the fields of arithmetic, geometry, and algebra, as well as the role of imaging and the productive power of imagination, the synthetic nature of mathematics and its ability to produce new knowledge, which corresponds to the basic principles of transcendental philosophy, is proved. It is demonstrated that the Kantian position is represented by the establishment of a priori conditions for the possibility of mathematical cognition, not a logical justification of mathematical concepts. It proves that the Kantian transcendental approach to mathematical cognition does not require formal-logical justification, which is inherent in most modern models of the philosophy of mathematics.

Віктор Козловський

Математика у світлі трансцендентальної естетики: чи створив Кант «філософію математики»?

Стаття присвячена критиці тези про наявність особливої «філософії математики» в трансцендентальній філософії Канта. На основі аналізу особливостей формування математичних предметів, зокрема в царині арифметики, геометрії та алгебри, а також ролі уяви та продуктивної сили виображення висновується синтетична природа математики, її спроможність продукувати нові знання, що відповідає базовим настановам трансцендентальної філософії. Продемонстровано, що Кантова позиція уточнювала умови можливості математичного пізнання, а не логічне обґрунтування математичних понять. Це доводить, що Кантів трансцендентальний підхід до математичного пізнання не потребує формально-логічного обґрунтування, притаманного більшості сучасних моделей філософії математики.

Viktor Kozlovskyi, PhD, Associate Professor, Department of Philosophy and Religious Studies, National University of Kyiv-Mohyla Academy.

Віктор Козловський, кандидат філософських наук, доцент кафедри філософії та релігієзнавства НАУКМА.

e-mail: vicn0298@gmail.com
